

CÁLCULO MATRICIAL

1. Resolva cada um dos seguintes sistemas:

$$(a) \quad \begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$
$$(b) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ x_4 - 2x_5 = 4 \end{cases}$$

2. Resolva cada um dos seguintes sistemas, pelo método de eliminação de Gauss:

$$(a) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$
$$(b) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$
$$(c) \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 10 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

3. Discuta, para todos os valores dos parâmetros, os sistemas abaixo:

$$(a) \quad \begin{cases} x - z = 1 \\ y + az = 0 \\ -x + y + 2az = 1 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$
$$(b) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = \gamma \\ x_1 + \gamma x_2 + \gamma x_3 = 1 \end{cases} \quad (\gamma \in \mathbb{R}).$$
$$(c) \quad \begin{cases} ax + 2z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$
$$(d) \quad \begin{cases} 2x + 4y + bz = 2 \\ x + (d + 2)y = 1 \\ x + 2y + bz = 1 \\ x + 2y = c \end{cases} \quad (b, c, d \in \mathbb{R}).$$

4. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine sempre que for possível:

- (a) $A + B$
- (b) $5A$
- (c) $A + C$
- (d) $4A - 3B$

5. Considere as seguintes matrizes:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Calcule, se possível

- (a) BC
- (b) DE
- (c) BE

6. Considere os seguintes sistemas definidos em \mathbb{R}^2 e em \mathbb{R}^3 , respectivamente por:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

- (a) Resolva matricialmente os sistemas anteriores e interprete geometricamente os conjuntos solução obtidos.
- (b) Resolva as seguintes equações vectoriais

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Relacione os resultados obtidos com os da alínea (a).

7. (a) Determine todos os valores dos parâmetros \underline{a} e \underline{b} para os quais

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(b) Sendo A uma matriz de ordem 3 satisfazendo as seguintes condições:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Calcule $A \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

8. Resolva, matricialmente cada um dos seguintes sistemas:

(a)
$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 2y = 2 \\ 4x + y = 9 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x - y + z + 2t = -1 \\ y - z + t + u = -1 \\ x + 2z + t + u = 0 \\ -x + 2y + 3t - u = -2 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x + y + 3z = 5 \\ 2x - y + 4z = 11 \\ -y + z = 3 \end{cases}$$

(d)
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

(e)
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

(f)
$$\begin{cases} x + y + z + 2t = 1 \\ y - z + t + u = 1 \\ x + 2z + t - u = 0 \\ x + 2y + 3t - u = 2. \end{cases}$$

9. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Determine $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ tal que $AX = 3X + B$.

10. Discuta, para todos os valores dos parâmetros $a, b, k \in \mathbb{R}$, os sistemas $AX = B$, onde

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & k \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 3 & 1 & b \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ b \end{bmatrix}.$$

11. Considere o sistema $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & a \\ -1 & 1 & 2a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine o valor do parâmetro a de modo que o sistema $AX = B$ seja possível qualquer que seja B .
- (b) Dê exemplo de um valor de a e de uma matriz B que tornem o sistema:
- i. indeterminado
 - ii. impossível

12. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

- (a) Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ de forma que o sistema $(A - \lambda I) X = 0$ tenha soluções diferentes da solução nula.
- (b) Determine a solução de $(A - \lambda I) X = 0$ considerando $\lambda = -1$.

13. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & 4 \\ 10 & 8 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

resolva os sistemas $AX = B_1$ e $AX = B_2$ em que

$$B_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

14. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 3 \ 0 \ 4], \quad D = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

(a) Indique todos os produtos possíveis.

(b) Calcule DC e A^2 .

15. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Calcule A^2 . Que conclusões pode tirar sobre a lei do anulamento do produto?

16. Determine a matriz inversa de

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

17. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ tem inversa.

Use A^{-1} para resolver o sistema $AX = B$ com

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

18. Sejam A , B e C matrizes invertíveis da mesma ordem.

- (a) Será $A + B$ invertível? E AB ?
- (b) Será A^2 invertível? Qual a sua inversa, no caso de existir?
- (c) Qual a inversa de $AB^{-1}C$?
- (d) Mostre que $A^{-1}(A + B)B^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

19. Mostre que se A , B e C são matrizes da mesma ordem e A é invertível, então

$$AB = AC \quad \text{implica} \quad B = C.$$

20. Suponha que A é uma matriz $n \times n$ tal que $(I - A)(I + A) = 0$.

Mostre que:

- (a) A é invertível.
- (b) $A^{-1} = A$.

21. Sejam A , B , C e X matrizes que satisfazem a relação

$$[(AX)^T + BC]^{-1} = I$$

onde I é a matriz identidade de ordem 2 e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \quad 3].$$

- (a) Qual o tipo da matriz X ?
- (b) Determine a matriz X .

22. Complete a matriz A de modo que ela seja:

- (a) simétrica
- (b) hemi-simétrica

$$A = \begin{bmatrix} * & * & -5 & 3 \\ 2 & * & * & * \\ * & -1 & * & * \\ * & 4 & -7 & * \end{bmatrix}$$

23. Sejam A e B duas matrizes simétricas, invertíveis e permutáveis. Prove que

- (a) A^{-1} e B são matrizes permutáveis.
- (b) $A^{-1} B^{-1}$ é uma matriz simétrica.
24. Seja A e B duas matrizes quadradas da mesma ordem. Prove que se B é hemi-simétrica, então $A^T B A$ é hemi-simétrica.
25. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3, invertível, e sejam b e c dois vectores de \mathbb{R}^3 .
- (a) Que pode dizer sobre a existência e unicidade de soluções dos sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$?
- (b) Prove que os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$ têm o mesmo conjunto de soluções sse $b = A^2c$.
- (c) Sejam u , v e w as soluções dos sistemas

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Determine, em termos dos vectores u , v e w , a matriz inversa de A .