

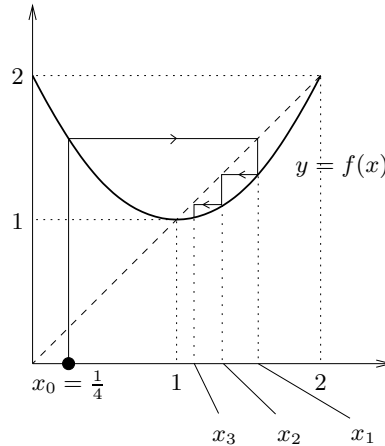
Uma resolução do Exame de Matemática e Estatística - 2ª Parte

15 Janeiro de 2010

1. Considere a função  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = (x - 1)^2 + 1$ .

(a) Calcule e represente num diagrama cobweb as primeiras 3 iterações da equação  $x_{n+1} = f(x_n)$ , com  $x_0 = \frac{1}{4}$ .

**Res:**  $x_1 = f(x_0) = f(\frac{1}{4}) = \frac{25}{16}$ ,  $x_2 = f(x_1) = \frac{337}{256}$  e  $x_3 = f(x_2) = \frac{72097}{65536}$ .



(b) Justifique que equação às diferenças  $x_{n+1} = f(x_n)$ , admite solução (única) para qualquer condição inicial  $x_0 \in [0, 2]$ , e determine essa solução.

**Res:** É sabido que a equação às diferenças  $x_{n+1} = f(x_n)$  com  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , admite solução (única) para todo o  $x_0 \in D$  se e só se  $f(D) \subset D$ , o que acontece neste caso pois  $D = [0, 2]$  e  $f(D) = [1, 2]$ . Tem-se,

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_0 - 1)^2 + 1 \\ x_2 &= (x_1 - 1)^2 + 1 = \underbrace{((x_0 - 1)^2 + 1 - 1)}_{x_1}^2 + 1 = (x_0 - 1)^4 + 1, \\ x_3 &= (x_2 - 1)^2 + 1 = \underbrace{((x_0 - 1)^4 + 1 - 1)}_{x_2}^2 + 1 = (x_0 - 1)^8 + 1, \\ &\vdots \\ x_n &= (x_{n-1} - 1)^2 + 1 = \underbrace{((x_0 - 1)^{2^{n-1}} + 1 - 1)}_{x_{n-1}}^2 + 1 = (x_0 - 1)^{2^n} + 1, \\ &\vdots \end{aligned}$$

A solução é portanto  $x_n = (x_0 - 1)^{2^n} + 1$ ,  $n \geq 0$ .

(c) Determine os pontos fixos de  $f$  e classifique-os quanto à estabilidade. Qual a bacia de atracção dos pontos fixos assintoticamente estáveis?

**Res:** Os pontos fixos de  $f$  são as soluções da equação  $f(x) = x$ . Ora,

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + 1 = x \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 - (x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = 2. \end{aligned}$$

Tem-se  $|f'(1)| = 0 < 1$  e  $|f'(2)| = 2 > 1$  pelo que  $x = 1$  é um ponto fixo hiperbólico assintoticamente estável e  $x = 2$  é um ponto fixo hiperbólico instável.

Por definição a bacia de atracção de um ponto fixo  $x^*$  é o conjunto das condições iniciais  $x_0$  para as quais se verifica  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*$ . Se  $x_0 \in [0, 2[$ , tem-se  $|x_0 - 1| < 1$  e pela a alínea anterior,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_0 - 1)^{2^n} + 1 = 1.$$

Se  $x_0 = 2$ ,  $x_n = 2$  para todo o  $n$  (pois  $x = 2$  é um ponto fixo da dinâmica) pelo que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2.$$

Assim a bacia de atracção do ponto fixo hiperbólico  $x = 1$  é  $[0, 2[$ .

(d) Mostre que  $f$  não admite 2-ciclos.

**Res:** Por definição os 2-ciclos correspondem aos pontos fixos de  $f^2 = f \circ f$  que **não são pontos fixos de  $f$** . Ora,

$$f^2(x) = (f(x) - 1)^2 + 1 = \left( (x - 1)^2 + 1 - 1 \right)^2 + 1 = (x - 1)^4 + 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f^2(x) = x &\Leftrightarrow (x - 1)^4 + 1 = x \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^4 - (x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)((x - 1)^3 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Como  $x = 1$  e  $x = 2$  são pontos fixos de  $f$ , são também pontos fixos de  $f^2$ . Isto significa  $x - 1$  e  $x - 2$  dividem  $f^2(x) - x = (x - 1)((x - 1)^3 - 1)$  e portanto que  $(x - 1)^3 - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$  admite a raíz  $x = 2$ . De facto, dividindo este polinómio por  $x - 2$  usando a regra de Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 3 & -2 \\ 2 & & 2 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

obtemos  $(x - 1)^3 - 1 = (x - 2)(x^2 - x + 1)$ . Como o polinómio  $x^2 - x + 1$  não admite raízes reais (verifique usando a fórmula resolvente), a equação  $f^2(x) = x$  não admite soluções para além dos pontos fixos de  $f$ ,  $x = 1$  e  $x = 2$ . Logo  $f$  não admite 2-ciclos.

2. A evolução do número de células  $N(t) > 0$  de um tumor é muitas vezes descrita pela equação diferencial de Gompertz

$$N' = -a N \ln \left( \frac{N}{b} \right), \quad a, b > 0.$$

(a) Determine e classifique quanto à estabilidade, as soluções constantes da equação de Gompertz (em função dos parâmetros  $a$  e  $b$ ).

**Res:** Trata-se de uma equação separável autónoma do tipo

$$N' = f(N) = -aN \ln \left( \frac{N}{b} \right).$$

Tem-se

$$f(N) = 0 \Leftrightarrow N \ln \left( \frac{N}{b} \right) = 0 \Leftrightarrow N = 0 \vee N = b.$$

Como  $N(t) > 0$  por hipótese, a única solução constante do problema é  $N(t) \equiv b$ . Esta solução constante é assintoticamente estável pois

$$f'(b) = -a \left( \ln \frac{b}{b} + 1 \right) = -a < 0.$$

(b) Determine as soluções não constantes da equação de Gompertz quando  $a = 1$ .

**Res:** Separando as variáveis e integrando obtemos,

$$\int \frac{dN}{N \ln \left( \frac{N}{b} \right)} = \int (-a) dt = -at + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Como  $(\ln \left( \frac{N}{b} \right))' = \frac{1}{N}$ , a primitiva no membro esquerdo é imediata, tendo-se

$$\int \frac{dN}{N \ln \left( \frac{N}{b} \right)} = \ln \left| \ln \left( \frac{N}{b} \right) \right|.$$

Assim,

$$\left| \ln \frac{N(t)}{b} \right| = e^{-at+C}, \quad t \in \mathbb{R},$$

isto é,

$$N(t) = \pm b e^{e^{-at+C}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

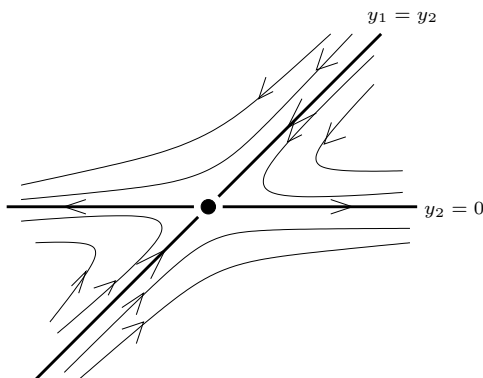
Como  $N(t) > 0$  por hipótese, a solução geral reduz-se a

$$N(t) = b e^{e^{-at+C}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Determine  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ . Interprete o resultado obtido em função dos resultados da alínea (a).

**Res:** Tem-se  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} b e^{e^{-at+C}} = b$ . Logo a longo prazo o número de células converge para  $b$  que corresponde à solução constante assintoticamente estável.

3. Na seguinte figura encontra-se representado o retrato de fase de um sistema linear autónomo  $Y' = AY$  que descreve o movimento de partículas no plano, em que  $(y_1(t), y_2(t))$  designa a posição de uma dada partícula no instante  $t$ .



Sabe-se que a matriz  $A$  admite os valores próprios  $\lambda = 2$  e  $\lambda = -1$ .

- (a) Classifique a origem enquanto ponto de equilíbrio do sistema indicando a sua estabilidade.

**Res:** Trata-se de um ponto de sela logo instável.

- (b) Indique, justificando, a solução geral do sistema.

**Res:** Observando a figura constatamos que existem duas direcções próprias  $u = (1, 1)$  e  $v = (1, 0)$  associadas às rectas  $y_2 = 0$  e  $y_1 = y_2$ , respectivamente. Uma vez que as trajectórias se aproximam da origem (ponto de equilíbrio do sistema), segundo a recta  $y_1 = y_2$  e se afastam segundo a recta  $y_2 = 0$ ,  $\lambda = -1 < 0$  é o valor próprio de  $A$  associado ao vector próprio  $u$  e  $\lambda = 2 > 0$  é valor próprio associado ao vector próprio  $v$ . Como os valores próprios são reais distintos, a solução geral é da forma,

$$Y(t) = A e^{-t} u + B e^{2t} v = A e^{-t}(1, 1) + B e^{2t}(1, 0), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

- (c) Se a posição de uma partícula no instante  $t = 0$  fôr o ponto  $(2, 1)$ , qual será a sua posição no instante  $t = \ln 2$ ? Interprete geometricamente o resultado obtido.

**Res:** Usando a condição inicial  $Y(0) = (2, 1)$ , isto é,

$$(A e^{-t} + B e^{2t}, A e^{-t}) = (2, 1),$$

concluimos que  $A = 1$  e  $B = 1$ . Portanto a curva integral que passa no instante  $t = 0$  no ponto  $(2, 1)$  é dada por

$$Y(t) = e^{-t}(1, 1) + e^{2t}(1, 0).$$

Substituindo no instante  $t = \ln 2$  obtém-se,  $Y(\ln 2) = (\frac{9}{2}, \frac{1}{2})$ . Logo a posição da partícula nesse instante é o ponto de coordenadas  $(\frac{9}{2}, \frac{1}{2})$ . A partícula desloca-se ao longo da curva integral que passa no ponto  $(2, 1)$  para a nova posição  $(\frac{9}{2}, \frac{1}{2})$  demorando para isso  $\ln 2$  unidades de tempo.