

Exame de Matemática e Estatística - 2ª Parte

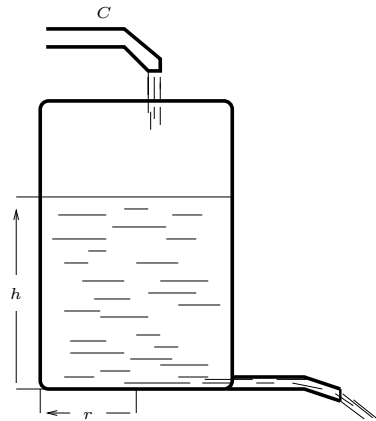
1 Fevereiro de 2010 - Duração: 1h15m

1. Considere a função  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} \lambda x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \lambda(2-x), & 1 < x \leq 2, \end{cases}$  com  $\lambda \in [0, 2]$ .

- (a) Represente o gráfico de  $f$  em função de  $\lambda$ .  
 (b) Determine os pontos do fixos de  $f$  em função de  $\lambda$ .

**Nas alíneas que se seguem assuma  $\lambda = 2$ .**

- (c) Justifique que a órbita definida pela semente  $x_0 = \frac{4}{5}$  é um 2-ciclo.  
 (d) Represente o gráfico de  $f^2$ . A função  $f$  admite outros 2-ciclos para além do referido na alínea anterior? Justifique a sua resposta.
2. (a) Considere o tanque cilíndrico representado na figura abaixo com uma secção circular de raio  $r$  (m) e suponha que a água entra no tanque com um caudal (volume de água por unidade de tempo) constante  $C$  ( $m^3/min$ ). Indique a equação diferencial que descreve a variação da altura de água no tanque em função do tempo, sabendo que água sai do tanque com um caudal proporcional à raiz quadrada da altura de água no tanque nesse instante. (Identifique as variáveis que utilizar e as unidades em que estão expressas.)



- (b) Resolva o seguinte problema de valores iniciais, indicando o maior intervalo onde a solução é válida.

$$\begin{cases} y' = e^{-y}(2 - 2t), \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

3. Considere o sistema linear autónomo de equações diferenciais,

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -3y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

- (a) Escreva o sistema na forma matricial.  
 (b) Determine a solução geral do sistema.  
 (c) Esboce o retrato de fase do sistema e classifique-o. Qual a estabilidade do sistema na origem?  
 (d) Determine a solução do problema de valores iniciais,

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$