Exercícios

Os alunos podem recorrer a programas de computação numérica sempre que a respectiva resolução analítica não seja viável e/ou para representar gráficos, órbitas, etc..., registando num ficheiro todas as instruções, valores dos parâmetros e condições iniciais, que fornecerem ao programa.

Equações às diferenças

1. A equação às diferenças

   $$x_{n+1} = -\sqrt{x_n}, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

   tem solução para toda condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}$?

   Que condições o domínio de uma função $f : D_f \to \mathbb{R}$ deve satisfazer para que a equação às diferenças

   $$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

   tenha solução x_n, $n \in \mathbb{N}_0$, para todo o $x_0 \in D_f$.

2. Determine a solução do PVI,

   $$\begin{cases} x_{n+1} &= 1 + x_n + 2\sqrt{1 + x_n}, \qquad n \geq 1 \\ x_1 &= 0 \end{cases}$$

3. Determine um PVI cuja solução seja a sequência:

   (a) $1, -3, 5, -7, 9, \ldots$

   (b) $0, 1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

   (c) $1, 1, 2, 6, 24, 120, \ldots$

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \pi \sin(x)$. Determine e represente num diagrama cobweb a órbita da equação às diferenças $x_{n+1} = f(x_n)$, gerada pela condição inicial $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

5. Considere a função $T(x) = \begin{cases} 2x, & x < \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

   (a) Determine $\lim_{n \to +\infty} T^n(x_0)$, para $x_0 = 0$, $x_0 = \frac{1}{6}$, $x_0 = \frac{2}{7}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ e $x_0 = \frac{2}{3}$.

   (b) Para cada um dos valores de x_0 considerados na alínea (a), represente as primeiras iteradas $T^n(x_0)$ num diagrama *cobweb*.

6. Considere a função $f_\lambda : [0,3] \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, definida por

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3 - \lambda(x-1), & 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

   (a) Determine o maior intervalo de variação do parâmetro λ para o qual a equação às diferenças

   $$x_{n+1} = f_\lambda(x_n),$$

   admite solução x_n, $n \geq 0$, para qualquer condição inicial $x_0 \in D_f$, i.e., para o qual a respectiva dinâmica está bem definida no intervalo $[0,3]$.

   (b) Para $\lambda = \frac{1}{2}$ calcule as primeiras 5 iteradas da órbita gerada pela condição inicial $x_0 = \frac{1}{4}$ e represente-a num diagrama *cobweb*.

7. Considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2x - 1. & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

   (a) Determine a órbita da equação às diferenças $x_{n+1} = f(x_n)$, gerada pela condição inicial $x_0 = \frac{1}{5}$ e represente-a num diagrama cobweb.

   (b) Determine $f^2(x) = f(f(x))$, $x \in [0,1]$, e relacione o resultado obtido com o da alínea anterior.

8. O seguinte modelo foi proposto para descrever o número de insectos de uma população,

$$N_{k+1} = N_k e^{1-\alpha N_k^2}, \qquad k \geq 0,$$

   onde N_k denota o número de indivíduos da população na k-ésima geração e $\alpha > 0$.

   Determine, em função do parâmetro α, os pontos fixos da equação às diferenças anterior.

9. Determine o período da órbita que contém a origem para as funções $f(x) = 1 - x^2$ e $g(x) = 1 - x^5$.

10. Determine os pontos fixos das seguintes funções e classifique-os quanto à estabilidade:

   (a) $f(x) = x^2 - 2x$.

   (b) $f(x) = x^3 - x$.

   (c) $f(x) = x^5$.

   (d) $f(x) = -x^3$.

   (e) $f(x) = 2x(1 - x)$.

   (f) $f(x) = 5x(1 - x)$.

(g) $f(x) = \frac{1}{x}$

(h) $f(x) = ax\left(\frac{1+a}{a} - x\right)$ em função do parâmetro $a > 0$.

(i) $f(x) = |x-2| - 1$.

11. Considere a função $f(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

    (a) Discuta a existência de pontos fixos de f em função do parâmetro c.

    (b) Para $c = -2$ determine os pontos periódicos de período mínimo 2.

12. Determine os pontos periódicos de período mínimo 2 das seguintes funções e classifique os pontos quanto à estabilidade:

    (a) $f(x) = -x - 1$.

    (b) $f(x) = 1 - x^2$.

    (c) $f(x) = -x^3$.

    (d) $f(x) = 2x(1-x)$.

    (e) $f(x) = 3.5x(1-x)$.

13. Um modelo de dinâmica de populações é descrito pela equação às diferenças

$$N_{k+1} = N_k e^{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{N_k}{\alpha}\right)}, \qquad k \geq 0,$$

onde N_k denota o número de indivíduos da população na k-ésima geração e $\alpha > 0$.

    (a) Determine, em função do parâmetro α, os pontos fixos desta dinâmica.

    (b) Uma população inicial de 20000 indívíduos é bem descrita pelo modelo anterior com $\alpha = 19800$. Qual será a previsível evolução da população a longo prazo? Justifique a sua resposta.

14. Prove que a função $f(x) = \dfrac{x}{x + \frac{1}{2}}$, $x \geq 0$, não admite pontos periódicos de período mínimo 2.

15. Considere o modelo em dinâmica de populações, conhecido por *modelo de Haldane* (1953)

$$x_{n+1} = \lambda x_n^{1-b} = f(x_n), \qquad n \geq 0, \quad \lambda, b > 0, \tag{1}$$

com f definida no intervalo $\mathbb{R}_0^+$.

    (a) Esboce o gráfico de f em função dos parâmetros λ, b.

    (b) Determine os pontos fixos hiperbólicos de f e indique a respectiva estabilidade.

    (c) Efectuando a mudança de variável $y_n = \log(x_n)$, indique uma solução da equação na forma fechada.

(d) Utilize a alínea anterior para determinar a bacia de atração dos pontos fixos estáveis desta dinâmica. O que conclui?

16. Considere o modelo em dinâmica de populações, conhecido por modelo de Cook (simplificado),

$$x_{n+1} = x_n e^{r(1-x_n)} = f(x_n), \qquad n \geq 0, \quad r > 0, \tag{2}$$

com f definida no intervalo $\mathbb{R}_0^+$.

(a) Represente o gráfico de f indicando os respectivo extremos (em função do parâmetro r).

(b) Determine os pontos fixos de f e indique a respectiva estabilidade.

(c) Represente algumas órbitas do sistema quando $r < 2$, num diagrama *cobweb* e num gráfico de x_n em função de n. O que conclui sobre as bacias de atracção dos pontos fixos determinados na alínea anterior?

(d) Justifique que $r = 2$ é um valor de bifurcação para f.

(e) Determine uma sequência de valores aproximados, $r_2, r_3, r_4, \ldots$, com $r_1 = 2 < r_2 < r_3 < r_4 < \cdots$, para os quais ocorre uma bifurcação de atractores estáveis com duplicação de período.

(f) Exiba órbitas periódicas de período 2, 4, 8 e 16, num diagrama *cobweb* e num gráfico de x_n em função de n.

(g) Investigue computacionalmente o comportamento do sistema quando $r = 3.1$.

Nota importante: Alguns dos exercícios de equações às diferenças foram extraídos e/ou adaptados de exercícios e modelos da seguinte bibliografia.

- Jorge Cadima, *Apontamentos manuscritos de equações às diferenças.*
- P.Blanchard, R. L. Devaney e G.R. Hall (1998), *Differential Equations*, Brooks/Cole Publishing Company.
- Daniel Kaplan e Leon Glass (1995), *Understanding Nonlinear Dynamics*, Springer-Verlag.
- J. Hale e H. Koak, (1991), *Dynamics and Bifurcations*, Text in Applied Mathematics, **3**, Springer-Verlag.

Equações diferenciais

17. Verifique que

    (a) $y = xe^x$ é solução de $y'' - 2y' + y = 0$.

    (b) $y = \sin x$ é solução de $y'' + 2y = \sin x$.

    (c) $f(x, y) = xy$ é solução de $\frac{1}{y} f'_x - \frac{1}{x} f'_y = 0$.

    (d) $y = t \int_0^t \sqrt{1 + u^4} du$ é solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} ty' - y = t^2 \sqrt{1 + t^4}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

18. Pretende-se determinar uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo a que $f(0) = \frac{1}{3}$ e que a recta tangente ao seu gráfico em $(t, f(t))$ tenha declive $2\,t + 3\,f(t)$. Formule matematicamente o problema.

19. Sabendo que um café à temperatura de $100^o C$, demorou 10min a arrefecer para os $80^o C$, numa sala a $20^o C$, determine o tempo necessário para o café atingir os $50^o C$?

20. Recorde que o *tempo de semi-vida* de um material radioactivo é o tempo necessário para a sua massa se reduzir a metade. O Carbono 14 usado em datação de achados arqueológicos tem um tempo de semi-vida de 5730 anos. Determine a percentagem de Carbono 14 que se desintegra em 100 anos.

21. É sabido que para muitas plantas isoladas a sua biomassa $W(t)$, nos estádios iniciais de desenvolvimento, cresce com uma taxa relativa constante.

    (a) Estabeleça a equação diferencial que exprime o aumento da biomassa.

    (b) Sabendo que a biomassa duplica em cada semana, calcule a taxa de crescimento relativa.

22. Considere o modelo de von Bertalanffy do slide 85.

    (a) Determine analiticamente e numericamente o comprimento $L(t)$ em função de t, admitindo que $L_0 = 9\ \mathtt{mm}$, $A = 27\ \mathtt{mm}$ e que o comprimento do peixe duplica ao fim da quarta semana.

    (b) Compare graficamente as soluções determinadas na alínea anterior.

23. Uma cultura de bactérias numa caixa de *Petri* multiplica-se com uma taxa de crescimento proporcional ao número de bactérias (em cada instante).

(a) Estabeleça a equação diferencial que traduz a evolução do número de bactérias ao longo do tempo, sabendo que o número original de bactérias duplicou ao fim de 8 horas.

(b) Determine o tempo necessário para que número original de bactérias triplique.

24. É sabido que para muitas substâncias medicamentosas administradas na corrente sanguínea, a taxa de decrescimento da *concentração* (i.e., da quantidade de substância por unidade de volume, usualmente em mg/l) é proporcional, em cada instante, à concentração.

    (a) A administração de uma dose de uma dada substância permite obter uma concentração inicial na corrente sanguínea de 30 mg/l.

    Estabeleça o problema de valores iniciais que traduz a evolução da concentração dessa substância após a administração de uma dose.

    (b) Sabendo que o nível sérico mínimo de eficácia é de 10 mg/l e que ao fim de 8 horas a concentração baixou para esse valor, determine ao fim de quanto tempo deve ser administrada a 3^a dose.

25. Considere um tanque cilíndrico de volume V_0 com um orifício na base como representado na figura do slide.

    Qual será o tempo necessário para esvaziar a água do tanque (em função das constantes do problema), admitindo que o tanque se encontrava cheio?

26. Determine uma solução das seguintes equações auónomas.

    (a) $y' = 2(y-1)$.

    (b) $(1+x)y\,dx + (1-y)x\,dy = 0$.

    (c) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$.

    (d) $(1+t)y' - y = 0$

27. Pretende-se seguir a evolução do número de efectivos $N(t)$ de uma dada população. No instante inicial $t=0$ foram contabilizados 1×10^4 efectivos.

    (a) Indique o problema de valores iniciais que traduz a dinâmica desta população, admitindo que a respectiva taxa de crescimento *per capita* r, se mantém constante ao longo do tempo.

    (b) Sabendo que a população passou de 1×10^4 para 3.5×10^4 efectivos em 5 anos determine um valor aproximado (às duas casas decimais) para r.

    (c) Ajuste o problema de valores iniciais anterior admitindo que a população segue um crescimento logísitico com a capacidade de sustentação do meio 3×10^5.

    (d) Indique as soluções de *equilíbrio* (i.e., constantes) da equação da alínea anterior.

(e) Determine a lei de crescimento da população $N(t)$. O que sucede à população quando $t \to +\infty$? Relacione o resultado com a alínea anterior.

28. Uma população isolada evolui de acordo com a equação logistíca com uma taxa de crescimento *per capita* $r = 1.5$ e capacidade de sustentação do meio $K = 100$.

    (a) Indique a equação diferencial que descreve a evolução do número de indivíduos da população.

    (b) Determine e classifique os pontos de equilíbrio desta equação e represente o respectivo diagrama de fase (unidimensional).

    Interprete os resultados obtidos.

Sistemas de equações diferenciais

29. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$.

    (a) Indique um sistema fundamental de soluções para $Y' = AY$.

    (b) Determine a solução do problema de valores iniciais,

$$\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

30. Resolva o sistema linear $Y' = AY$ para cada uma das matrizes indicadas a seguir.

    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

    (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

    (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

    (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

31. Relativamente às alíneas do exercício anterior determine respectivo o fluxo.

32. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Classifique a origem enquanto ponto de equilíbrio do sistema $Y' = AY$ e esboce o respectivo retrato de fase.

(b) Determine uma solução não nula do sistema $Y' = AY$.

(c) Utilize a alínea anterior para determinar uma solução não nula da equação linear de 2ª ordem, $y'' - y' - 2y = 0$.

33. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, convertendo-as em sistemas (lineares) de primeira ordem.

(a) $y'' - 5y' + 4y = 0$.

(b) $y''' - 5y'' + 4y' = 0$.

34. Represente o diagrama de fase das seguintes equações diferenciais, classificando os respectivos pontos de equilíbrio em termos de estabilidade e indicando a bacia de atracção dos pontos assimptoticamente estáveis.

(a) $y' = y(y+1)(y-2)(y-4)$.

(b) $y' = y^4 - 5y^2 + 4$.
(Sug.: Na alínea (b) efectue a mudança de variável $x = y^2$.)

35. Escreva a solução geral e esboce o diagrama de fase do sistema linear autónomo $Y' = AY$ admitindo que A possui os vectores próprios indicados em cada uma das seguintes alíneas (relativamente à alínea a), indique também equações para as órbitas do diagrama de fase).

(a) $v_1 = (1,0)$ associado ao valor próprio $\lambda_1 = 1$ e $v_1 = (0,1)$ associado ao valor próprio $\lambda_2 = 2$.

(b) $v_1 = (1,1)$ associado ao valor próprio $\lambda_1 = 1$ e $v_2 = (1,-1)$ associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2$.

(c) $v_1 = (1,0)$ associado ao valor próprio $\lambda_1 = -2$ e $v_3 = (-1,2)$ associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2$.

(d) $v_1 = (1,0)$ associado ao valor próprio $\lambda_1 = -2$ e $v_3 = (-2,1)$ associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2$.

(e) $v_1 = (i,1)$ associado ao valor próprio $\lambda = -2 + 3\,i$.

(f) $v = (1, 1+i)$ associado ao valor próprio $\lambda = ii$

36. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Classifique a origem enquanto ponto de equilíbrio do sistema $Y' = AY$ e esboce o respectivo retrato de fase.

(b) Determine uma solução não nula do sistema $Y' = AY$.

(c) Utilize a alínea anterior para determinar uma solução não nula da equação linear de 2ª ordem, $y'' - y' - 2y = 0$.

37. Usando diagrama de bifurcação (critério do traço e determinante), classifique a origem enquanto ponto de equilíbrio do sistema linear $Y' = AY$ (indicando a respectiva estabilidade), relativamente a cada uma das seguintes matrizes.

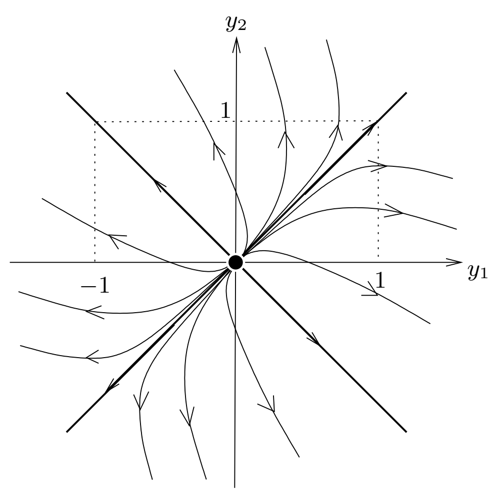
    (a) $A = \begin{bmatrix} 8 & 14 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$.

    (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$.

    (c) $A = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

    (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

38. Na seguinte figura apresenta-se o esboço do retrato de fase de um sistema de equações diferenciais linear autónomo $Y' = AY$, cuja matriz admite valores próprios 2 e 4. [2.5v]



    (a) Classifique, a origem enquanto ponto de equilíbrio do sistema $Y' = AY$ indicando a respectiva estabilidade.

    (b) Determine a solução do sistema que no instante $t = 0$ passa no ponto $(3, 1)$.

    (c) Mostre que a órbita do retrato de fase que passa em $(3, 1)$ verifica a equação $(y_1 + y_2)^2 = 8(y_1 - y_2)$.

39. Duas populações N_1 e N_2 competem pelos mesmos recursos segundo o modelo de competição de Lotka-Volterra. No seguinte quadro apresentam-

se os respectivos parâmetros

r_1	$=$	0.1	r_2	$=$	$.2$
K_1	$=$	1000	K_2	$=$	1000
$\alpha_{1,2}$	$=$	$.7$	$\alpha_{2,1}$	$=$	$.8$
$N_1(0)$	$=$	250	$N_2(0)$	$=$	300

(a) Determine as isoclinas nulas do sistema.

(b) Determine os pontos de equilíbrio e classifique-os quanto à estabilidade.

(c) Que pode concluir sobre a coexistência destas espécies?

(d) Qual o efeito que produz nas populações o aumento do coeficiente de competição interespecífico $\alpha_{1,2}$ para 1.5?

(e) Represente num gráfico $(N_1, N_2) vs t$ a evolução diária de cada uma das populações ao longo de um ano e num gráfico $N_1 vs N_2$ a órbita que passa em $(250, 300)$

40. Duas populações H e P interagem entre si segundo o modelo de predação de Lotka-Volterra. No seguinte quadro apresentam-se os respectivos parâmetros

r	$=$	$.9$	k	$=$	1
b	$=$	1	c	$=$	1.1
$H(0)$	$=$	3	$P(0)$	$=$	2

(a) Represente o retrato de fase deste sistema e as respectivas isoclinas nulas.

(b) Interprete a evolução das duas populações à luz do resultado da alínea anterior.

(c) Qual o efeito que produz nas populações o aumento do número incial de presas para 5? O que conclui?