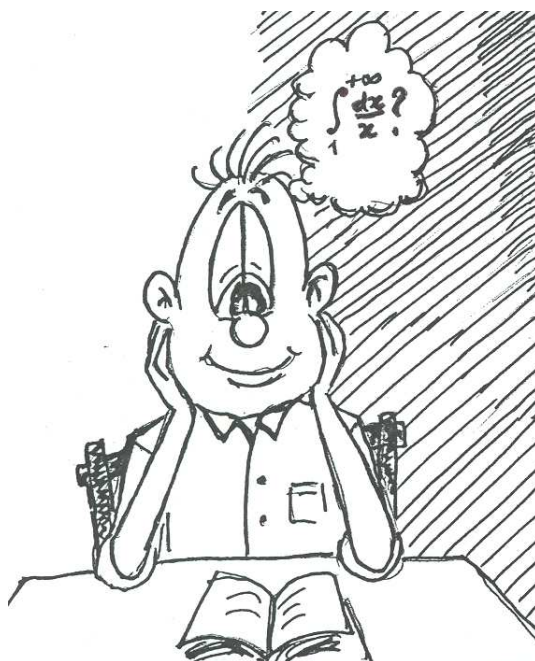


Matemática e Informática

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL



INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

- 2008 -

Nestes apontamentos expõe-se a parte relativa a Análise em \mathbb{R} da Unidade Curricular *Matemática e Informática*, do 1º ano de todas as licenciaturas adaptadas a Bolonha, do Instituto Superior de Agronomia.

Muitos dos exemplos e dos exercícios dos Capítulos 2 e 3 foram retirados dos textos manuscritos da Isabel Faria para apoio às aulas da disciplina *Análise Matemática I* e do Capítulo 2 das *Lições de Matemática II* da autoria do Pedro Silva.

A Marta Mesquita produziu as figuras do Anexo do Capítulo 1. O Pedro Silva, com a sua perícia no LaTeX, GnuPlot e XFig e a sua infinita paciência, prestou um apoio precioso na elaboração deste documento.

Os autores: Jorge Orestes Cerdeira, Isabel Martins e Ana Isabel Mesquita
ISA, Setembro 2008

Conteúdo

1	Complementos sobre derivadas	3
1.1	Regra de Cauchy	4
1.2	Fórmula de Taylor	9
1.3	Complementos sobre estudo de funções	16
2	Primitivação	29
3	Cálculo integral	47
3.1	Integral definido	47
3.2	Integral indefinido	66
3.3	Integral impróprio	71

CONTEÚDO

Capítulo 1

Complementos sobre derivadas

A derivada de uma função dá indicações interessantes sobre o comportamento da função (ver Figura 1.1). O sinal da derivada dá informação sobre a monotonia (crescimento e decrescimento). Os zeros da derivada são as abscissas dos possíveis extremos da função (máximos e mínimos). Também o sinal e os zeros da segunda derivada estão relacionados com o sentido da concavidade e os eventuais pontos de inflexão do gráfico da função.

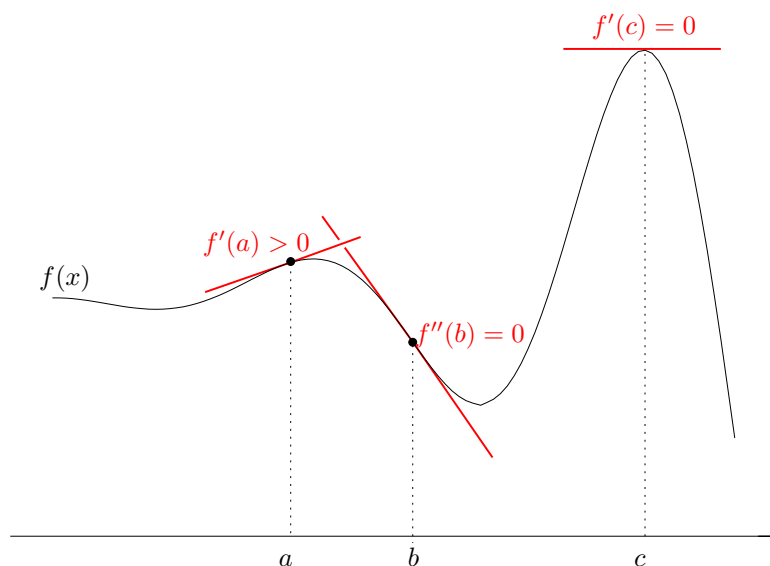


Figura 1.1: Alguns detalhes do gráfico de $f(x)$ e suas relações com 1ª e 2ª derivadas.

Vamos apresentar outras aplicações da derivada. Em particular, vamos usar derivadas para levantar indeterminações no cálculo de limites e para aproximar funções por polinômios.

1.1 Regra de Cauchy

No cálculo dos limites de funções as indeterminações ocorrem quando as regras operatórias dos limites não se aplicam. Por exemplo,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 - 2x + 1}{5x^3 - 4}$$

conduz a uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Esta indeterminação pode ser levantada pondo em evidência os termos de maior grau no numerador e no denominador. Tem-se assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 - 2x + 1}{5x^3 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{5x^3(1 - \frac{4}{5x^3})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{5x^3} = -\frac{1}{5}.$$

De uma forma geral para levantar indeterminações geradas por funções racionais, quando x tende para infinito, aplica-se a seguinte fórmula:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}, \text{ com } a_n, b_m \neq 0.$$

O resultado que vamos agora apresentar permite levantar indeterminações geradas por uma grande variedade de funções.

Teorema 1.1 (*Regra de Cauchy: indeterminações $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$*)

Sejam f, g duas funções deriváveis num intervalo aberto I de extremidade a (a pode ser $-\infty$ ou $+\infty$) tal que $g'(x) \neq 0$ para todo o $x \in I$. Se

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ou ∞ , e
2. existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito ou infinito),

então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Vejam os alguns exemplos de aplicação da regra de Cauchy.

EXEMPLOS 1

1. O limite notável $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \left(\frac{0}{0}\right) = 1$, pode agora ser obtido assim:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+3x)} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{3}{1+3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+3x}{3+3x} = 1.$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1.$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \cos x = 0.$

É de salientar dois tipos de situações que podem ocorrer ao utilizar esta regra.

OBSERVAÇÕES 1

1. Pode não haver $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ e, no entanto, existir $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1$, uma vez que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, pois $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}$
e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0$.

Neste caso, a regra de Cauchy não é aplicável dado que $\frac{(x+\sin x)'}{x'} = 1 + \cos x$ não tem limite quando x tende para ∞ .

2. Em certos casos a regra deve ser aplicada repetidas vezes.

Para obter $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$, aplicámos a regra duas vezes.

A regra de Cauchy permite concluir o seguinte.

Proposição 1.2 Para todo o $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tem-se

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

Assim, quando comparadas com qualquer potência positiva de x , a função e^x cresce mais rapidamente enquanto $\ln x$ cresce mais devagar. (Ver Figura 1.2.)

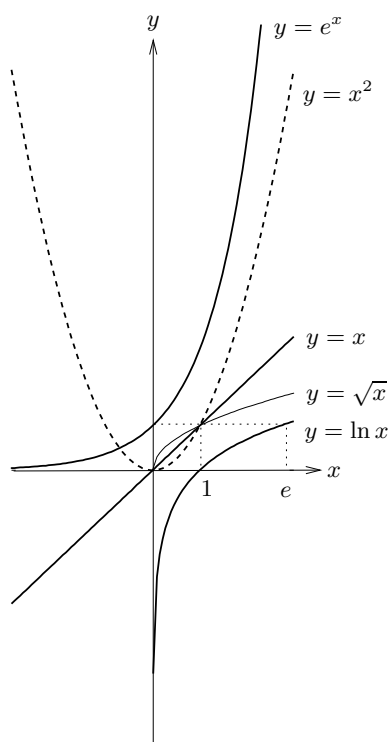


Figura 1.2: Gráficos das funções $\ln x$, e^x , \sqrt{x} , x e x^2 .

EXERCÍCIOS 1

1. Calcule, se existir, cada um dos seguintes limites.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{6x^2-10x-4} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x-1} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt[3]{x^5}} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3-5x+1}{\ln x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1-x}{\ln(1+x)-x} & \end{array}$$

2. Prove a proposição 1.2.

A aplicação da regra de Cauchy não se esgota em indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, uma vez que indeterminações de outros tipos podem ser convertidos nestes.

Indeterminações $0 \times \infty$

Utilizando $f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$, transformam-se em indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

EXEMPLOS 2

$$\begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x (0 \times \infty) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0. \\ 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x (\infty \times 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{e^{-x}} = 0. \end{array}$$

Indeterminações $0^0, \infty^0, 1^\infty$

Indeterminações destes tipos transformam-se em indeterminações $0 \times \infty$. Dado que, para $f > 0$, pode escrever-se $f^g = e^{\ln f^g} = e^{g \ln f}$, a indeterminação introduzida pela potência exponencial f^g é transferida para o produto $g \ln f$, sob a forma $0 \times \infty$.

EXEMPLOS 3

$$\begin{array}{l} 1. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x (0^0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x} = e^0 = 1, \text{ uma vez que, como vimos atrás,} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0. \\ 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} (\infty^0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln x} = e^0 = 1, \text{ visto que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln x (0 \times \infty) = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0. \end{array}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} = e^1 = e, \text{ tendo em conta que}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x}) \quad (\infty \times 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \quad \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{fazendo } y = \frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + y} = 1.$$

Note que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ generaliza o resultado das sucessões: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Indeterminações $\infty - \infty$

Geralmente este tipo de indeterminação levanta-se transformando a expressão num quociente.

Vejamos alguns exemplos.

EXEMPLOS 4

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\sec x - \operatorname{tg} x) \quad (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x) \quad (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty, \text{ atendendo a que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) \quad (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \quad \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x - x \sin x + \cos x} = 0.$$

EXERCÍCIOS 2

1. Calcule, caso existam, os seguintes limites.

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 + 3x - 9} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln x} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} x e^{1/x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} \quad e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}\right)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \ln x \quad g) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{1/x} \quad h) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x}$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x + \ln \frac{1}{x} \right) & \text{j)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} & \text{k)} \lim_{x \rightarrow 1} x^{\ln x} \\
 \text{l)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{5x} & \text{m)} \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^x & \text{n)} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \\
 \text{o)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln(\sin x) & \text{p)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x} & \text{q)} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln^2 x)^x
 \end{array}$$

2. Determine, caso existam, as assíptotas dos gráficos das seguintes funções.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} y = \frac{3x^2 - 5x + 6}{2x - 3} & \text{b)} y = \sqrt{x^2 - x} & \text{c)} y = (x^2 + 2x)e^{-x} \\
 \text{d)} y = 2x - \frac{1}{x}e^{1+\frac{3}{x}} & \text{e)} y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 + e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}
 \end{array}$$

3. Identifique os maiores domínios de continuidade e derivabilidade das seguintes funções e defina as correspondentes derivadas de 1ª ordem.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} y = \begin{cases} x \ln x & \text{se } x > 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} & \text{b)} y = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\
 \text{c)} y = \begin{cases} e^{-\frac{2}{x^2}} - 1 & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases} &
 \end{array}$$

1.2 Fórmula de Taylor

Os polinómios são funções simples, com propriedades bem conhecidas e particularmente adequados para a realização de cálculos numéricos. Vamos mostrar que muitas funções podem ser aproximadas por polinómios. Neste contexto vai intervir a noção de derivada de ordem superior à primeira.

Define-se, por recorrência, *derivada de ordem* $n \in \mathbb{N}$ de f , que se representa por $f^{(n)}$, a função

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \text{ com a convenção } f^{(0)} = f.$$

Também é usual representar a derivada de ordem n de $y = f(x)$ por $\frac{d^n f}{dx^n}$ ou $\frac{d^n y}{dx^n}$.

EXEMPLOS 5

1. As sucessivas derivadas da função $\sin x$ são:

$$\sin^{(0)} x = \sin x, \sin' x = \cos x, \sin'' x = -\sin x, \sin''' x = -\cos x, \sin^{(4)} x = \sin x, \dots$$

2. A derivada de qualquer ordem da função exponencial e^x é e^x .

3. As sucessivas derivadas do polinómio $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 1$ são:

$$P'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 8x - 1$$

$$P''(x) = 36x^2 - 12x + 8$$

$$P'''(x) = 72x - 12$$

$$P^{(iv)}(x) = 72$$

$$P^{(n)}(x) = 0, n \geq 5.$$

Em geral, se $P(x)$ é um polinómio de grau m , tem-se $P^{(n)}(x) = 0$, para $n \geq m + 1$.

As funções que admitem derivadas de qualquer ordem dizem-se indefinidamente deriváveis.

Todas as funções dos Exemplos 5 são indefinidamente deriváveis.

Vamos agora mostrar que para toda a função f que admite derivada de ordem n no ponto a , existe um polinómio P_n , de grau menor ou igual do que n , que é uma *boa aproximação* de f para valores de x próximos de a . Mais precisamente, vamos mostrar que o erro $|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$ de utilizar o valor de $P_n(x)$ em substituição de $f(x)$ é tal que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$. É este o significado de P_n ser uma boa aproximação de f em pontos próximos de a . Por outras palavras, quando os valores de x se aproximam de a , o erro cometido em x tende mais rapidamente para 0 do que $(x-a)^n$.

Comecemos por analisar o caso em que $n = 1$.

Aproximação de 1ª ordem

Recordemos que se f é uma função derivável no ponto a do seu domínio, a recta de equação

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

é a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a . Se fizermos

$$P_1(x) = y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

o erro $|R_1(x)|$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_1(x)}{x - a} = 0$ (ver Figura 1.3). De facto,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_1(x)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0.$$

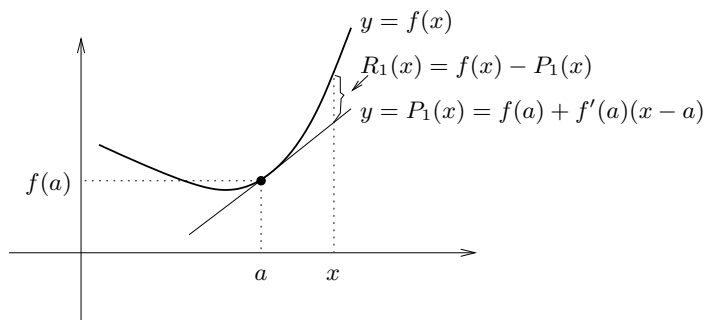


Figura 1.3: Aproximação de 1ª ordem ao gráfico da função $f(x)$ no ponto de abcissa a .

Assim, a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a é uma boa aproximação de 1ª ordem de $f(x)$ para valores de x próximos de a .

Aproximação de 2ª ordem

Se a função f' é derivável em a a aproximação de 1ª ordem de f' é

$$z(x) = f'(a) + f''(a)(x - a),$$

tendo-se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - z(x)}{x - a} = 0$.

Qual é o significado desta aproximação da função f' em termos de f ?

Se procurarmos a função que no ponto de abcissa a coincide com $f(a)$ e cuja derivada é $z(x)$ ¹, obtém-se o polinómio de grau menor ou igual do que 2:

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

¹esta operação, inversa da derivação, será estudada no Capítulo 2.

1.2. FÓRMULA DE TAYLOR

que satisfaz

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x-a)^2} \Big|_{\left(\frac{0}{0}\right)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - P_2'(x)}{(x-a)} \underbrace{=}_{P_2'(x)=z(x)} 0.$$

Assim, conclui-se que $P_2(x)$ é uma boa aproximação de 2ª ordem de $f(x)$ para valores de x próximos de a .

EXEMPLO 6 Para valores próximos de 0, a função $f(x) = e^x$ tem como polinómios aproximadores de 1ª e 2ª ordens:

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x, \quad P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

respectivamente (ver Figura 1.4).

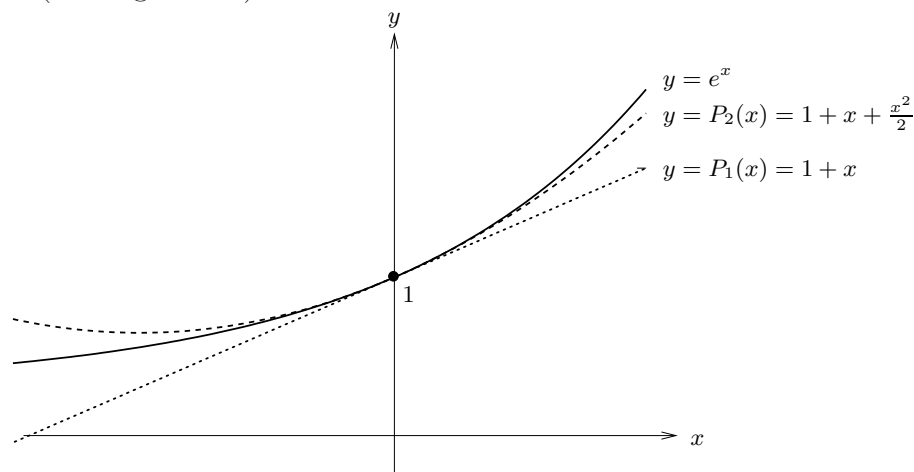


Figura 1.4: Aproximações de 1ª e 2ª ordens ao gráfico de e^x no ponto de abcissa 0.

Constata-se que a aproximação P_2 é mais precisa do que a aproximação P_1 , em pontos próximos de $(0, f(0))$.

Aproximação de ordem n

Aplicando o raciocínio anterior a $f^{(n-1)}$ ($n > 1$), conclui-se o seguinte resultado.

Teorema 1.3 (*Fórmula de Taylor*) Sejam I um intervalo aberto, f uma função n vezes derivável no ponto $a \in I$ e

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Tem-se

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad \text{com} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0. \quad (1.1)$$

Chama-se a (1.1) *fórmula de Taylor* de ordem n de f no ponto a . O polinómio $P_n(x)$ é designado por *polinómio de Taylor* de ordem n de f em a e $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ é o *resto de Taylor* de ordem n .

No caso particular de $a = 0$ tem-se

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

em que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0$, que se chama *fórmula de MacLaurin* de ordem n de f . Neste caso o polinómio de Taylor toma o nome de polinómio de MacLaurin.

EXEMPLOS 7

1. O polinómio de Taylor de ordem 3 de $f(x) = \ln x$ no ponto $a = 1$ é

$$P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3.$$

2. O polinómio de MacLaurin de ordem n de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ é

$$P_x(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n.$$

3. Para cada uma das funções indicadas a seguir a correspondente fórmula de MacLaurin de ordem n é

- a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$ com $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0$.

1.2. FÓRMULA DE TAYLOR

$$\text{b) } \ln(1+x) \underbrace{=}_{x>-1} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x) \text{ com } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0.$$

$$\text{c) } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \text{ com } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = 0.$$

Com hipóteses mais fortes do que as do Teorema 1.3, o resto de Taylor de ordem n assume uma expressão mais precisa.

Teorema 1.4 *Sejam f uma função com derivada de ordem $n+1$ ($n \in \mathbb{N}_0$) num intervalo aberto I e $a \in I$. Para todo o $x \in I \setminus \{a\}$, existe um ponto c entre a e x , $c \neq a, x$, tal que o resto de Taylor de ordem n é*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

que se chama resto de Lagrange de ordem n .

EXEMPLOS 8

1. Vamos utilizar a fórmula de MacLaurin de ordem 3 da função $f(x) = \sin x$, com resto de Lagrange, para calcular um valor aproximado de $\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9}$.

Tem-se

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3(x), \text{ com } R_3(x) = \frac{\sin c}{4!} x^4 \text{ e } c \in]0, x[.$$

Fazendo $x = \frac{\pi}{9}$ vem

$$\sin \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + R_3\left(\frac{\pi}{9}\right), \text{ em que } \left| R_3\left(\frac{\pi}{9}\right) \right| = \left| \frac{\sin c}{4!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^4 \right| \leq 0.0006.$$

Assim, $\sin 20^\circ \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^3$, com erro inferior a $\frac{6}{10^4}$.

2. Considere o polinómio $P(x) = 2 + 3x - x^2 + 5x^3$. Como $P^{(4)}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, o resto de Lagrange de ordem 3 é nulo e portanto a correspondente fórmula de Taylor no ponto $a = 1$ é

$$\begin{aligned} P(x) &= P(1) + P'(1)(x-1) + \frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3 = \\ &= 9 + 16(x-1) + 14(x-1)^2 + 5(x-1)^3, \end{aligned}$$

que não é mais do que o desenvolvimento do polinómio $P(x)$ em potências de $(x-1)$.

EXERCÍCIOS 3

1. Escreva os polinómios de Taylor de ordens 1, 2 e 3 de $f(x) = \ln x$ no ponto $a = 1$.
2. Escreva o polinómio de MacLaurin de ordem 3 para cada uma das seguintes funções:
 - a) $f(x) = (x-1)^3 + 5(x-1)^2 + 3$
 - b) $f(x) = xe^x$
 - c) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$
 - d) $f(x) = \cos x$
 - e) $f(x) = \operatorname{tg} x$.
3. Use a fórmula de Taylor para escrever o polinómio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ como soma de potências de $x + 2$.
4. (1º Teste 2006/07- Módulo I)
 - a) Escreva o polinómio de Taylor de ordem 2 da função \sqrt{x} no ponto $a = 1$.
 - b) Utilize o polinómio da alínea anterior para indicar um valor aproximado de $\sqrt{\frac{1}{2}}$.
5. (1º Teste 2006/07- Módulo I)

Seja $P_2(x)$ o polinómio de MacLaurin de ordem 2 da função $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$.

 - a) Explícite $P_2(x)$.
 - b) Justifique que, para valores positivos de x , tem-se $P_2(x) > f(x)$.
6. Considere a função $f(x) = 2 \ln(\cos x)$.
 - a) Determine o polinómio de Taylor de 2º grau que aproxima $f(x)$ para pontos próximos de 0.
 - b) Prove que o erro cometido pela aproximação definida em a) é inferior a $\frac{4}{3}x^3$ para $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$.
7. Utilize a fórmula de Taylor para mostrar que $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$, para $x \in]0, \pi[$.

1.3 Complementos sobre estudo de funções

No ensino secundário foram estudadas algumas famílias de funções:

- as funções polinomiais, com destaque para as funções afins e quadráticas;
- as funções racionais, evidenciando as funções homográficas;
- as funções potência de expoente racional;
- as funções exponenciais e logarítmicas;
- as funções trigonométricas seno, coseno e tangente.

Vamos agora introduzir as funções arco seno, arco coseno e arco tangente, que são as funções inversas de seno, coseno e tangente, respectivamente. Começemos por notar que sendo o seno, o coseno e a tangente funções periódicas, não são injectivas. Assim, há que restringir os seus domínios a intervalos nas quais sejam injectivas e como tal invertíveis.

A função arco seno

Ao definir a função inversa do seno é usual restringir o domínio da função seno ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, onde esta é estritamente crescente e assume todos os valores do seu contradomínio $[-1, 1]$.

A função inversa de $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ é

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x &\rightarrow y = \arcsin x \end{aligned}$$

O símbolo $\arcsin x$ lê-se “arco cujo seno é x ” e designa o ângulo do intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cujo seno é o valor de $x \in [-1, 1]$. Por exemplo, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

O gráfico de $y = \arcsin x$ (ver Figura 1.5), sintetiza as principais propriedades desta função:

- domínio = $[-1, 1]$;

- contradomínio = $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
- contínua e estritamente crescente.

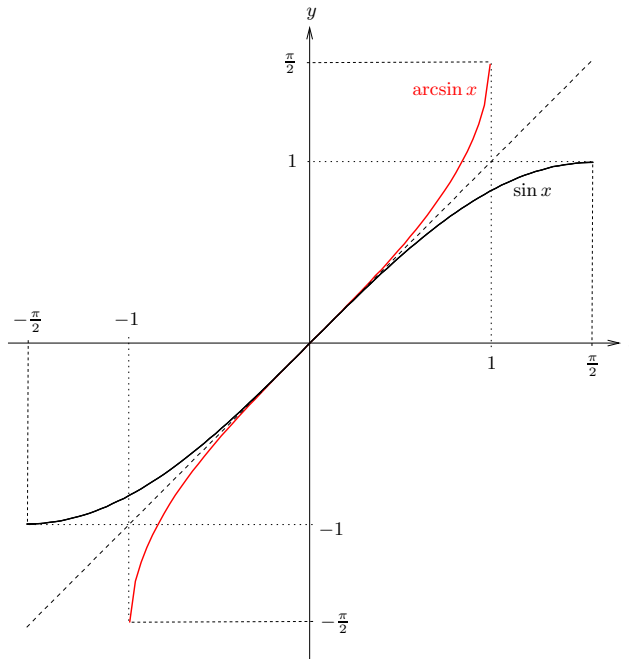


Figura 1.5: Gráficos das funções seno e arco seno.

A função arco seno é derivável em $] - 1, 1[$. Vamos deduzir a expressão da derivada em cada ponto desse intervalo.

Tendo em conta que $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$, vamos calcular $y' = \frac{dy}{dx}$ derivando em ordem a x ambos os membros da 2ª igualdade. Como y é função de x há que recorrer à fórmula de derivação da função composta. Tem-se pois,

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\cos y} \stackrel{(**)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}.$$

(*) Usou-se o facto de $\cos y \neq 0$ que decorre de $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(**) Para $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos y > 0$ e portanto $\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \Leftrightarrow \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$.

Podemos assim concluir que

$$(\arcsin x)' = \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1, 1[.$$

Aplicando a regra de derivação da função composta, tem-se

$$(\arcsin f(x))' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}, \quad f(x) \in]-1, 1[.$$

Nos pontos $x = 1$ e $x = -1$ a derivada de $\arcsin x$ é $+\infty$.

EXEMPLO 9 A função composta $y = \arcsin x^3$, definida em $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x^3 \leq 1\} = [-1, 1]$, tem como derivada

$$(\arcsin x^3)' = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}, \quad x \in]-1, 1[.$$

A função arco coseno

A função inversa do coseno chama-se arco coseno e, para a sua definição, é usual restringir a função coseno ao intervalo $[0, \pi]$, onde esta é estritamente decrescente e assume todos os valores do seu contradomínio $[-1, 1]$. Tem-se pois

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\rightarrow [0, \pi] \\ x &\rightarrow y = \arccos x \end{aligned}$$

O símbolo $\arccos x$ lê-se “arco cujo coseno é x ” e designa o ângulo do intervalo $[0, \pi]$ cujo coseno é o valor de $x \in [-1, 1]$. Por exemplo, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Assim definida, a função $y = \arccos x$ (ver Figura 1.6) tem as seguintes características:

- domínio = $[-1, 1]$;
- contradomínio = $[0, \pi]$;
- contínua e estritamente decrescente.

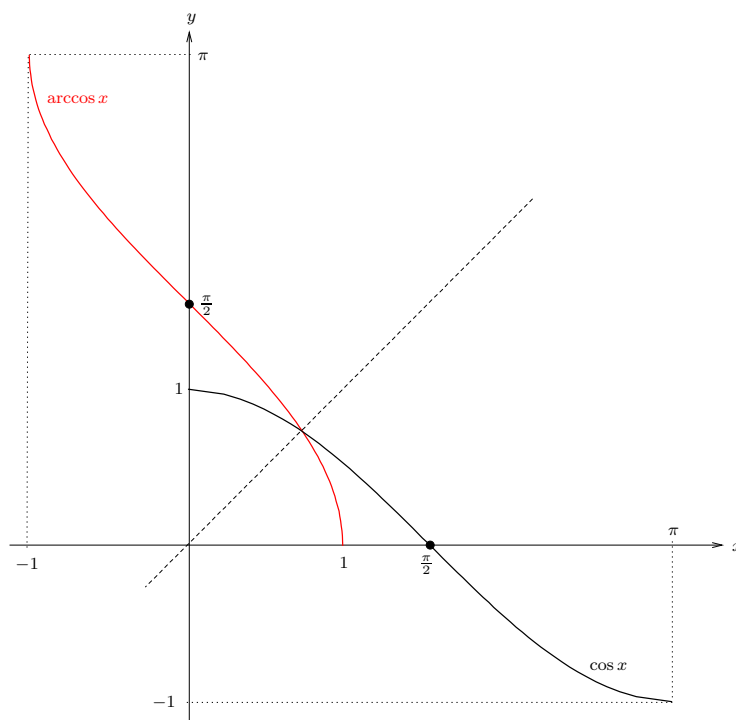


Figura 1.6: Gráficos das funções coseno e arco coseno.

A expressão da derivada do arco coseno, que pode ser obtida de forma análoga à da derivada da função arco seno, é dada por

$$(\arccos x)' = \frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1, 1[.$$

A regra de derivação da função composta estabelece que

$$(\arccos f(x))' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}, \quad f(x) \in]-1, 1[.$$

Nos pontos $x = 1$ e $x = -1$ a derivada de $\arccos x$ é $-\infty$.

EXEMPLO 10 A função composta $y = \arccos 3x$, definida em $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 3x \leq 1\} = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, tem como derivada

$$(\arccos 3x)' = -\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}, \quad x \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[.$$

A função arco tangente

A função inversa da tangente define-se considerando a função tangente restrita ao intervalo $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, no qual esta é estritamente crescente e assume todos os valores de \mathbb{R} . Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} : \mathbb{R} &\rightarrow] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x &\rightarrow y = \operatorname{arctg} x \end{aligned}$$

O símbolo $\operatorname{arctg} x$ lê-se “arco cuja tangente é x ” e designa o ângulo do intervalo $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ cuja tangente é o valor de $x \in \mathbb{R}$. Por exemplo, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

A função $y = \operatorname{arctg} x$ (ver Figura 1.7) tem as seguintes características:

- domínio = \mathbb{R} ;
- contradomínio = $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$;
- contínua e estritamente crescente;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$, isto é, as rectas $y = \frac{\pi}{2}$ e $y = -\frac{\pi}{2}$ são assíntotas horizontais.

A função arctg é derivável em \mathbb{R} e, por um processo análogo ao que usamos no cálculo de arcsin' , tem-se

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Usando a regra de derivação da função composta vem

$$(\operatorname{arctg} f(x))' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}.$$

EXEMPLO 11 $(\operatorname{arctg} e^x)' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$.

OBSERVAÇÃO 2 Por vezes as funções trigonométricas inversas $\operatorname{arcsin} x$, $\operatorname{arccos} x$ e $\operatorname{arctg} x$ são representadas por $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ e $\operatorname{tg}^{-1} x$, respectivamente. Esta notação para a função inversa não deve criar confusões com as funções $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, $\operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x}$ e $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

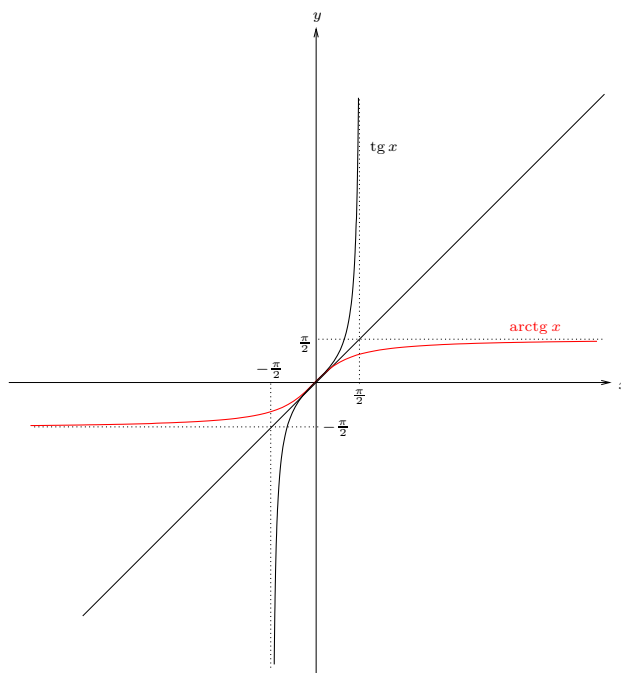


Figura 1.7: Gráficos das funções tangente e arco tangente.

EXERCÍCIOS 4

1. Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões:

- | | | |
|------------------------------|--|--|
| a) $\arcsin 1 - \arcsin(-1)$ | b) $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1)$ | c) $\arcsin(\sin \frac{5}{6}\pi)$ |
| d) $\cos(\arcsin 0.6)$ | e) $\sin(2 \arcsin 0.6)$ | f) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \frac{\pi}{7})$ |
| g) $\sin(\arcsin 0.123)$. | | |

2. Calcule $\frac{dy}{dx}$:

- | | | |
|----------------------------------|---|---------------------------|
| a) $y = \arcsin \frac{x-1}{x+1}$ | b) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2$ | c) $y = x(\arcsin x)^2$. |
|----------------------------------|---|---------------------------|

3. Calcule:

- | | | |
|---|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{arctg} x}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 - \cos 2x}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ | e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin x}{\sin^2 3x}$. | |

1.3. COMPLEMENTOS SOBRE ESTUDO DE FUNÇÕES

Terminamos este capítulo fazendo notar que a maioria das funções que irão surgir ao longo do curso resultam de somas, produtos, quocientes ou composições de um número finito de funções de entre:

- as funções polinomiais;
- as funções potência;
- as funções exponenciais e logarítmicas;
- as funções trigonométricas seno, cosseno, tangente, arco seno, arco cosseno e arco tangente.

As funções assim obtidas chamam-se *elementares*. No Anexo 1.2 apresentamos os gráficos de algumas funções elementares.

EXEMPLOS 12 São elementares as funções:

1. $\sin(\ln(1 - x^2))$, $x \in] - 1, 1[$
2. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3+x^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$
3. $\sqrt{e^x - 1}$, $x \in [0, +\infty[$
4. $x^x = e^{x \ln x}$, $x \in]0, +\infty[$.

As regras de derivação permitem concluir que as funções elementares são deriváveis e que as suas derivadas são ainda funções elementares.

EXERCÍCIOS 5

Estude as seguintes funções, indicando para cada uma delas o domínio, assíntotas, intervalos de monotonia e extremos, sentido da concavidade e pontos de inflexão. Esboce o gráfico de cada uma destas funções.

1. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$
2. $f(x) = \frac{-4}{\sqrt{5x+2}}$
3. $f(x) = x^2|2x - 1|$

4. $f(x) = x \ln^2 x$

5. $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$

6. $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$

7. $f(x) = e^{-x^2}$

8. $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$

9. $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg}(x - 1)$

10. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 + e^{x^2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases} .$

Anexo 1.1

1) $(k)' = 0$	10) $(\operatorname{tg} f)' = \sec^2 f \cdot f'$ $(\sec f = \frac{1}{\cos f})$
2) $(f^\alpha)' = \alpha \cdot f^{\alpha-1} \cdot f'$, $\alpha \in \mathbb{R}$	11) $(\operatorname{cotg} f)' = -\operatorname{cosec}^2 f \cdot f'$ $(\operatorname{cotg} f = \frac{1}{\operatorname{tg} f}$ e $\operatorname{cosec} f = \frac{1}{\sin f})$
3) $(e^f)' = e^f \cdot f'$	12) $(\sec f)' = \sec f \cdot \operatorname{tg} f \cdot f'$
4) $(a^f)' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$, $a \in \mathbb{R}^+$	13) $(\operatorname{cosec} f)' = -\operatorname{cosec} f \cdot \operatorname{cotg} f \cdot f'$
5) $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$	14) $(\arcsin f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
6) $(\log_a f)' = \frac{f'}{f \cdot \ln a}$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	15) $(\arccos f)' = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$
7) $(f^g)' = g \cdot f^{g-1} \cdot f' + f^g \cdot \ln f \cdot g'$, $f > 0$ $(f^g = e^{g \ln f})$	16) $(\operatorname{arctg} f)' = \frac{f'}{1+f^2}$
8) $(\sin f)' = \cos f \cdot f'$	
9) $(\cos f)' = -\sin f \cdot f'$	

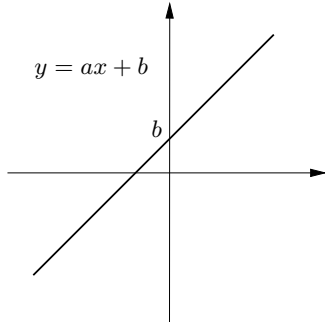
Tabela 1.1: Derivadas de algumas funções elementares.

1) $(f + g)' = f' + g'$
2) $(\alpha f)' = \alpha f'$, $\alpha \in \mathbb{R}$
3) $(fg)' = f'g + fg'$
4) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
5) $(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] f'(x)$

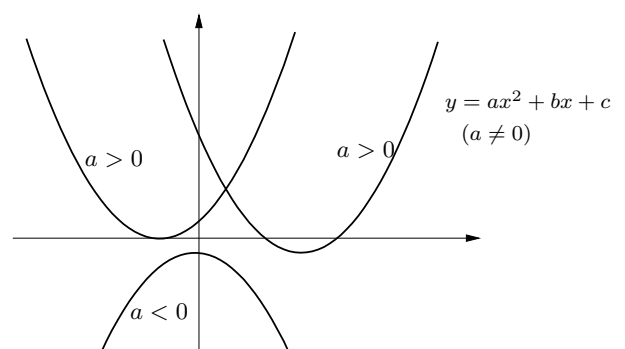
Tabela 1.2: Regras de derivação.

Anexo 1.2

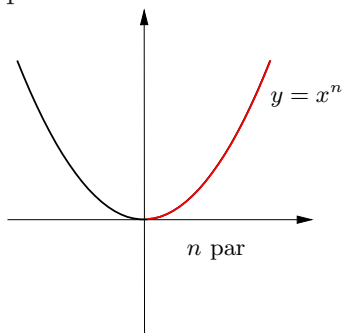
1. Função afim



2. Função quadrática

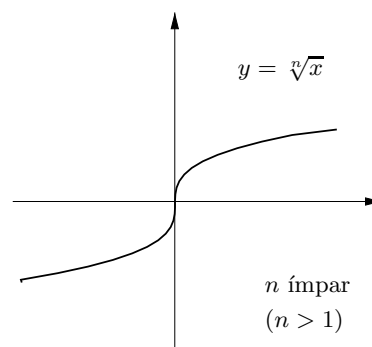
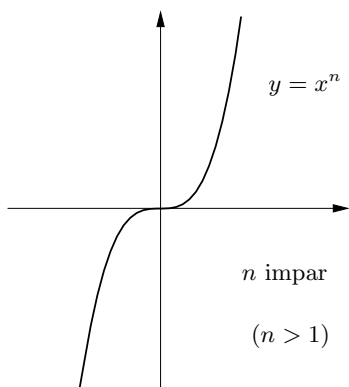
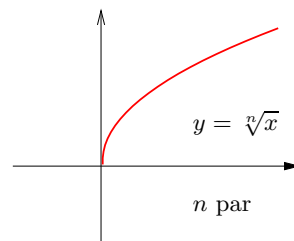


3. Função potência de expoente inteiro positivo



inversa

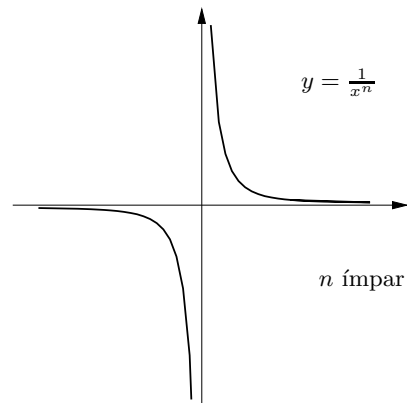
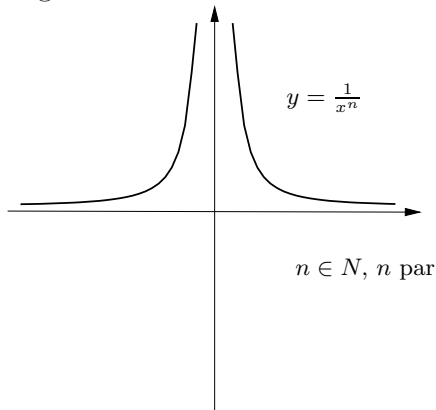
4. Função raiz índice $n \in \mathbb{N}$



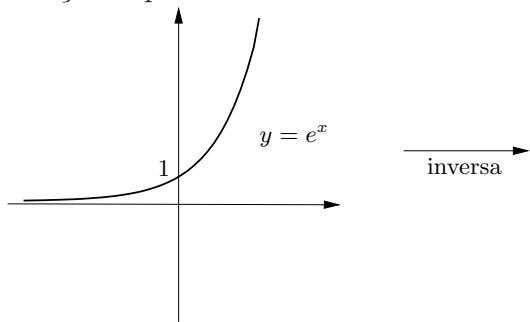
1.3. COMPLEMENTOS SOBRE ESTUDO DE FUNÇÕES

5. Função potência de expoente inteiro

negativo

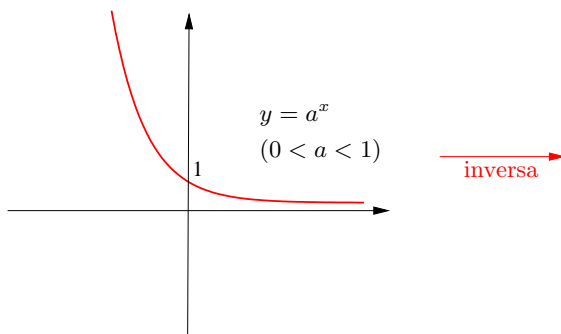
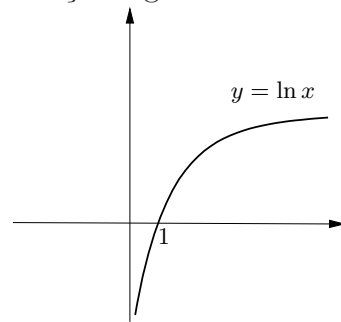


6. Função exponencial

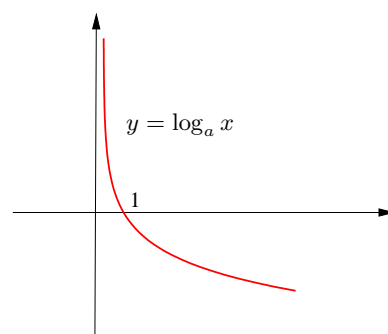


inversa

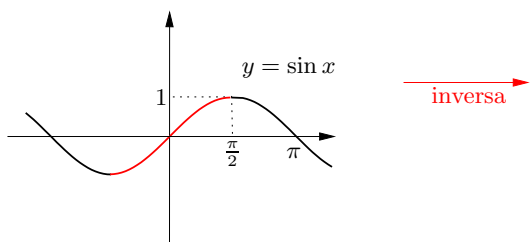
7. Função logarítmica



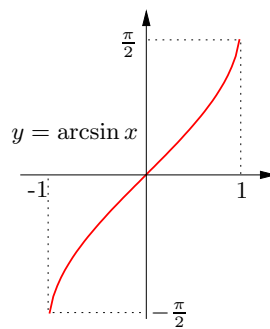
inversa

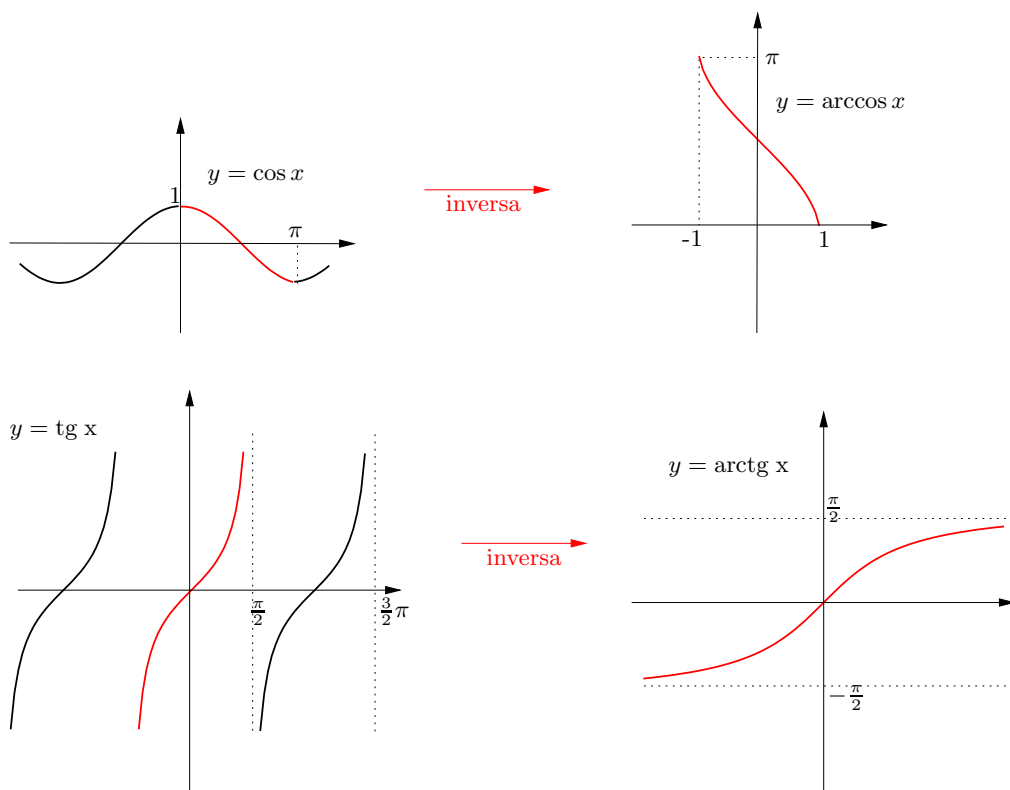


8. Funções trigonométricas



inversa





1.3. COMPLEMENTOS SOBRE ESTUDO DE FUNÇÕES

Capítulo 2

Primitivação

A primitivação é a operação inversa da derivação. Vamos ocupar-nos da determinação das primitivas de uma função, i.e., das funções que admitem essa função como derivada.

Definição 1 *A função F é uma primitiva da função f no intervalo I (com mais do que um ponto) se $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$. Para indicar que F é uma primitiva de f é usual escrever-se $F = Pf$ ou $F = \int f$.*

Portanto, tem-se $F = Pf$ sse $F' = f$.

É útil ter presente as seguintes igualdades que ilustram que a primitivação e a derivação são operações inversas.

$$(Pf)' = f \quad \text{e} \quad Pf' = f$$

EXEMPLOS 13

1. $P1 = x$ em \mathbb{R} , pois $x' = 1$.
2. $Px = \frac{x^2}{2}$ em \mathbb{R} , pois $(\frac{x^2}{2})' = x$.
3. $Px = \frac{x^2}{2} + 3$ em \mathbb{R} , pois $(\frac{x^2}{2} + 3)' = x$.
4. $P\frac{1}{x} = \ln x$ em $]0, +\infty[$, pois $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

5. $P(\cos x e^{\sin x}) = e^{\sin x}$ em \mathbb{R} , pois $(e^{\sin x})' = (\sin x)' e^{\sin x} = \cos x e^{\sin x}$.

6. $P \frac{2}{1+4x^2} = \arctg 2x + \sqrt{2}$ em \mathbb{R} , pois $(\arctg 2x + \sqrt{2})' = \frac{(2x)'}{1+(2x)^2} = \frac{2}{1+4x^2}$.

Na Tabela 2 figuram primitivas de algumas funções elementares.

EXERCÍCIOS 6 Calcule

1. $P \frac{e^x}{1+e^x}$

2. $P \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

3. $P \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

4. $P \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

5. $P \frac{\cos x}{\sin x}$

6. $P \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

7. $P \cos x \sin^2 x$

8. $P \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$

9. $P \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$

10. $P \frac{1}{x(1+\ln x)}$.

OBSERVAÇÕES 3 Decorre directamente da definição de primitiva de uma função que, se f é primitivável em I (isto é, existe uma primitiva de f em I), então

1. Existe um número infinito de primitivas de f em I (se $F = Pf$, então $F + C = Pf$, qualquer que seja a constante C). Por exemplo, $\ln x + \sqrt{2}$ e $\ln x + 1$ são ambas primitivas de $\frac{1}{x}$ em $]0, +\infty[$. Qualquer função da forma $\ln x + C$ é uma primitiva de $\frac{1}{x}$ em $]0, +\infty[$.
2. Toda a primitiva de f em I é uma função contínua em I (uma primitiva é uma função derivável e portanto é contínua).

Se F é uma primitiva de f no intervalo I , será que existem outras primitivas de f para além das funções da forma $F + C$? Por exemplo, será que além das primitivas de $\frac{1}{x}$ da forma $\ln x + C$ existirão outras funções F tais que $F'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in]0, +\infty[$? A resposta é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.1 *Se f é primitivável no intervalo I , quaisquer duas primitivas de f em I diferem de uma constante.*

Demonstração: Se $F = Pf$ e $G = Pf$ em I , tem-se $F' = f$ e $G' = f$ em I . Assim, $F' = G' \Leftrightarrow (F - G)' = 0$ em $I \Leftrightarrow F - G$ é constante em I . \square

Portanto, se F é uma qualquer primitiva de f em I , as primitivas de f são as funções da forma $G = F + C$, $\forall C \in \mathbb{R}$. Assim, fixado $x_0 \in I$ e dado um um qualquer $y_0 \in \mathbb{R}$, existe uma única primitiva de f que passa no ponto (x_0, y_0) .

EXEMPLOS 14

1. A função $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G'(x) = x^2$ e $G(0) = 1$ é a primitiva de x^2 que em $x = 0$ assume o valor 1.

$G(x) = Px^2 = \frac{x^3}{3} + C$, com $G(0) = \frac{0^3}{3} + C = 1 \Rightarrow C = 1$. Portanto, $G(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ (ver Figura 2.1).

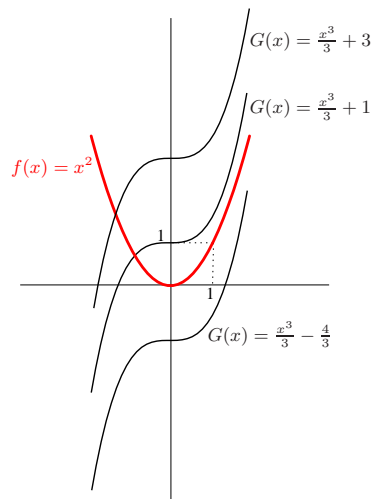


Figura 2.1: Gráficos da função $f(x) = x^2$ e de algumas das suas primitivas.

2. A função $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \pi$ é a primitiva de $\frac{1}{1+x^2}$ que tende para π quando x tende para $+\infty$.

$G(x) = P\frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, com C tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \frac{\pi}{2} + C = \pi \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$.

Tem-se pois $G(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}$.

3. Qual é a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz $h''(x) = 2x$, $h'(0) = 1$ e $h(0) = 2$?

A função h é uma primitiva de uma primitiva de $h''(x) = 2x$. Começemos por determinar a 1ª derivada h' . A função h' é a primitiva de h'' que em $x = 0$ assume o valor 1. Assim, $h'(x) = P2x = x^2 + C$, com $h'(0) = 0^2 + C = 1 \Rightarrow C = 1$ e, portanto, $h'(x) = x^2 + 1$.

A função h é a primitiva de h' que em $x = 0$ assume o valor 2, i.e., $h(x) = P(x^2+1) = \frac{x^3}{3} + x + D$, com $h(0) = \frac{0^3}{3} + 0 + D = 2 \Rightarrow D = 2$. Tem-se pois $h(x) = \frac{x^3}{3} + x + 2$.

Todas as funções dos exemplos anteriores são primitiváveis. Em que condições é que uma função definida num dado intervalo é primitivável nesse intervalo? O seguinte resultado indica que apenas as funções descontínuas poderão não ser primitiváveis.

Teorema 2.2 *Toda a função contínua no intervalo I é primitivável em I .*

OBSERVAÇÃO 4 A derivada descreve a taxa de variação instantânea de uma função. Assim, qualquer primitiva $F = \int f$ é uma função cuja variação instantânea coincide com f .

Por exemplo, a velocidade $v = f(t)$ é a taxa de variação da posição de um objecto (a deslocar-se segundo uma dada trajectória) em relação ao tempo. Assim, $P(t) = \int f(t) + C$, com C constante, indica a posição do objecto, que se desloca àquela velocidade, em função do tempo.

Se $v = at + v_0$ (movimento uniformemente acelerado), tem-se

$$P(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + C.$$

Se considerarmos o movimento a partir de um dado instante, digamos $t = 0$, i.e., se admitirmos que $P(0) = 0$, a constante C na expressão anterior vem igual a 0.

Vamos agora apresentar algumas propriedades que vão ser úteis no cálculo das primitivas de muitas funções. As duas primeiras são consequências imediatas das regras de derivação da soma e do produto escalar de funções.

Proposição 2.3 *Se f e g são funções primitiváveis em I , a função $f + g$ é primitivável em I e $P(f + g) = Pf + Pg$.*

EXEMPLOS 15

$$1. P(x^3 + x + 1) = Px^3 + Px + P1 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x.$$

$$2. P\frac{2x+1}{x^2+1} = P\frac{2x}{x^2+1} + P\frac{1}{x^2+1} = \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x.$$

$$3. P\operatorname{tg}^2 x = P(\sec^2 x - 1) = P\sec^2 x - P1 = \operatorname{tg} x - x.$$

Proposição 2.4 *Se f é primitivável em I e λ é um número real, a função λf é primitivável em I e $P(\lambda f) = \lambda Pf$.*

EXEMPLOS 16

$$1. P(-3x) = -3Px = -\frac{3}{2}x^2.$$

$$2. P\frac{x}{x^2+1} = P\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2}P\frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1).$$

$$3. P(3x^2 - 4 \cos 2x) = 3Px^2 - 2P(2 \cos 2x) = x^3 - 2 \sin 2x.$$

As duas propriedades seguintes resultam directamente das regras de derivação do produto e da composição de funções, respectivamente.

Proposição 2.5 *(Primitivação por partes.) Sejam f e g funções definidas no intervalo I , f primitivável ($F = Pf$) e g derivável em I . Tem-se*

$$P(fg) = Fg - P(Fg'),$$

desde que $P(Fg')$ exista.

EXEMPLOS 17

$$1. P(x \sin x) = xP \sin x - P(P(\sin x)x') = -x \cos x - P(-\cos x) = -x \cos x + \sin x.$$

Note que teria sido infeliz a escolha de x para f e $\sin x$ para g na fórmula da primitivação por partes. Dessa escolha resultaria $P(x \sin x) = \frac{x^2}{2} \sin x - P(\frac{x^2}{2} \cos x)$, sendo o cálculo de $P(\frac{x^2}{2} \cos x)$ um desafio mais complexo do que o da primitiva inicial.

$$2. P \ln x \stackrel{(*)}{=} P(1 \ln x) = x \ln x - P(x \frac{1}{x}) = x \ln x - x.$$

(*) Este artifício é muitas vezes utilizado.

$$3. P \sin^3 x = P(\sin x \sin^2 x) = -\sin^2 x \cos x + P(\cos x 2 \sin x \cos x) = -\sin^2 x \cos x + 2P(\sin x \cos^2 x) = -\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos^3 x.$$

$$4. P(e^x \sin x) = e^x \sin x - P(e^x \cos x) = e^x \sin x - (e^x \cos x + P(e^x \sin x)) = e^x \sin x - e^x \cos x - P(e^x \sin x).$$

A equação $P(e^x \sin x) = e^x \sin x - e^x \cos x - P(e^x \sin x)$ acima estabelecida vai permitir calcular $Pe^x \sin x$.

$$\text{De facto, } P(e^x \sin x) = e^x \sin x - e^x \cos x - P(e^x \sin x) \Leftrightarrow 2P(e^x \sin x) = e^x(\sin x - \cos x) \Leftrightarrow P(e^x \sin x) = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x).$$

Repare que para calcular $Pe^x \cos x$, se tivéssemos escolhido $\cos x$ para primitivar e e^x para derivar, não faríamos mais do que desfazer as operações já efectuadas.

OBSERVAÇÃO 5 Como fica claro dos exemplos anteriores, o sucesso deste método de primitivação é condicionado, em parte, pela possibilidade de identificar uma factorização fg da função a primitivar, em que $F = Pf$ seja conhecida.

EXERCÍCIOS 7

Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

- | | | |
|-----------------|---------------------|-----------------------------|
| 1. xe^x | 2. $x \ln x$ | 3. $\operatorname{arctg} x$ |
| 4. $x^2 \sin x$ | 5. $\ln(x^2 + 1)$. | |

Proposição 2.6 (*Primitivação por substituição.*) *Sejam I e J dois intervalos, f uma função primitivável em I e $\varphi : J \rightarrow I$ uma bijecção derivável. Então,*

$$Pf(x) = P(f(\varphi(t))\varphi'(t)), \text{ com } t = \varphi^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \varphi(t).$$

EXEMPLOS 18

1. $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}, x \in \mathbb{R}$.

Fazendo $e^x = t \Rightarrow x = \ln t = \varphi(t), t \in J =]0, +\infty[$, vem $x' = \varphi'(t) = \frac{1}{t}$.

Note que $\varphi(t) = \ln t :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é bijectiva e derivável.

$$\begin{aligned} Pf(x) &= P(f(\varphi(t))\varphi'(t)) = P\left(\frac{1}{1+t} \frac{1}{t}\right) = \\ &= P\left(-\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t}\right) = -\ln(1+t) + \ln t = \\ &= -\ln(1+e^x) + x. \end{aligned}$$

2. $f(x) = \cos \sqrt{x}, x \in [0, +\infty[$.

Com $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 = \varphi(t), t \in [0, +\infty[$, tem-se $x' = \varphi'(t) = 2t$.

$$\begin{aligned} Pf(x) &= P(f(\varphi(t))\varphi'(t)) = P(2t \cos t) = \\ &= 2t \sin t - 2P \sin t = 2t \sin t + 2 \cos t = \\ &= 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x}. \end{aligned}$$

3. $f(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 1]$.

Fazendo $x = \sin t = \varphi(t)$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, vem $x' = \varphi'(t) = \cos t$.

$$\begin{aligned} Pf(x) &= P(f(\varphi(t))\varphi'(t)) = P(\sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t) = \\ &= P \cos^2 t = P \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) = \\ &= \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2} \sin 2t) = \frac{1}{2}(t + \sin t \cos t) = \\ &= \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}). \end{aligned}$$

Repare que $\cos t = \pm\sqrt{1 - \sin^2 t}$ (a partir da fórmula $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$). Quando $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$ porque $\cos t \geq 0$.

EXERCÍCIOS 8

Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

1. $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}$
2. $\sin(\ln x)$
3. $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$
4. (2º Teste 2006/07- Módulo I) $\frac{e^{2x}}{1+e^x}$
5. $\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

A primitivação de funções racionais requer uma atenção especial.

Uma função racional é *própria* se o grau do polinómio do denominador é maior do que o do numerador. Uma função racional não própria diz-se *imprópria*.

A função racional $\frac{x^2+2x-1}{x^3-x^2+x-1}$ é própria e $\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-5x^2+8x-4}$ e $\frac{x^5}{x^2-5x+6}$ são impróprias.

Teorema 2.7 *Toda a função racional pode ser decomposta na soma de um polinómio e uma função racional própria.*

O exemplo seguinte mostra como esta decomposição pode ser feita.

EXEMPLO 19

$$R(x) = \frac{2x^3 - x}{x^2 - 5x + 6}.$$

$$\begin{array}{r}
 2x^3 \quad - \quad x \quad \quad \quad \underline{x^2 - 5x + 6} \\
 \underline{-2x^3 + 10x^2 - 12x} \quad \quad \quad 2x + 10 \\
 \quad \quad \quad 10x^2 - 13x \\
 \quad \quad \quad \underline{-10x^2 + 50x - 60} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 37x - 60
 \end{array}$$

Assim, $2x^3 - x = (2x + 10)(x^2 - 5x + 6) + 37x - 60$ e, portanto,

$$R(x) = 2x + 10 + \frac{37x - 60}{x^2 - 5x + 6}.$$

Uma vez que primitivar polinómios não oferece qualquer dificuldade, basta saber primitivar funções racionais próprias para calcular as primitivas de qualquer função racional. De facto, como veremos mais à frente, basta apenas saber primitivar certos tipos de funções racionais próprias chamadas fracções simples.

Definição 2 *Chama-se fracção simples a uma função racional própria do tipo $\frac{a}{(x-\alpha)^k}$ ou $\frac{Ax+B}{((x-p)^2+q^2)^k}$ ¹, em que $a, \alpha, A, B, p, q \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$.*

As fracções simples $\frac{a}{(x-\alpha)^k}$ admitem as seguintes primitivas:

$$P \frac{a}{(x-\alpha)^k} = \begin{cases} a \ln |x - \alpha| & \text{se } k = 1 \\ a \frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1} & \text{se } k > 1 \end{cases}.$$

EXEMPLOS 20

1. $P \frac{2}{x+5} = 2 \ln |x+5|.$
2. $P \frac{5}{(x-2)^3} = 5 P (x-2)^{-3} = -\frac{5}{2} \frac{1}{(x-2)^2}.$

¹Todo o polinómio de grau 2 de raízes complexas $p \pm iq$ se escreve como o produto de uma constante por $(x-p)^2 + q^2$.

As primitivas de

$$\frac{Ax + B}{((x - p)^2 + q^2)^k} \quad (2.1)$$

têm expressões mais complicadas, que se obtêm com a substituição $x = p + qt$.

EXEMPLO 21 $P \frac{x + 2}{(x + 1)^2 + 4}$.

Fazendo a substituição $x = -1 + 2t$, vem

$$\begin{aligned} P \frac{x + 2}{(x + 1)^2 + 4} &= P 2 \frac{1 + 2t}{4t^2 + 4} = \\ &= \frac{1}{2} P \left(\frac{1}{t^2 + 1} + \frac{2t}{t^2 + 1} \right) = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} t + \ln(t^2 + 1)) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(\left(\frac{x + 1}{2} \right)^2 + 1 \right). \end{aligned}$$

Para valores de $k > 1$ o cálculo da primitiva obtém-se a partir da substituição $x = p + qt$ e utilizado a fórmula de recorrência

$$P \frac{1}{(t^2 + 1)^k} = \frac{t}{2k - 2} \frac{1}{(t^2 + 1)^{k-1}} + \frac{2k - 3}{2k - 2} P \frac{1}{(t^2 + 1)^{k-1}}.$$

Na tabela 2.2 figuram as primitivas de (2.1) para $k = 1, 2$.

Teorema 2.8 *Toda a função racional própria pode ser decomposta na soma de frações simples. Se $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ é uma função racional própria,*

1. *Cada raiz real α de $Q(x)$ de multiplicidade k dá origem à soma das k frações simples: $\frac{a_1}{(x-\alpha)^k}, \frac{a_2}{(x-\alpha)^{k-1}}, \dots, \frac{a_k}{x-\alpha}$.*
2. *Cada par de raízes complexas $p \pm iq$ de $Q(x)$ de multiplicidade k dá origem à soma das k frações simples: $\frac{A_1 x + B_1}{((x-p)^2 + q^2)^k}, \frac{A_2 x + B_2}{((x-p)^2 + q^2)^{k-1}}, \dots, \frac{A_k x + B_k}{(x-p)^2 + q^2}$.*

Os exemplos seguintes mostram como esta decomposição pode ser feita.

EXEMPLOS 22

$$1. R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^3 + x}.$$

As raízes de $Q(x) = x^3 + x = x(x^2 + 1)$ são 0 com multiplicidade 1 e $\pm i$ com multiplicidade 1. Usando o Teorema 2.8, tem-se

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{a}{x} + \frac{Ax + B}{x^2 + 1}.$$

Os coeficientes a , A e B podem ser determinados pelo método dos coeficientes indeterminados:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 + x} = \frac{a}{x} + \frac{Ax + B}{x^2 + 1} &\Rightarrow 1 = a(x^2 + 1) + (Ax + B)x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 = ax^2 + a + Ax^2 + Bx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 = (a + A)x^2 + Bx + a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + A &= 0 \\ & B = 0 \\ a &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A &= -1 \\ B &= 0 \\ a &= 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Portanto, $R(x) = \frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$ e assim

$$PR(x) = P \frac{1}{x^3 + x} = P \frac{1}{x} - P \frac{x}{x^2 + 1} = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1).$$

$$2. R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^2 - 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}.$$

1 é uma raiz de $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)T(x)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 8 & -4 \\ 1 & & 1 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \underline{0} \end{array}$$

Assim, $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)T(x) = (x - 1)(x^2 - 4x + 4) = (x - 1)(x - 2)^2$.

Portanto, as raízes de $Q(x)$ são 1 com multiplicidade 1 e 2 com multiplicidade 2.

Pelo Teorema 2.8 tem-se

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} &= \frac{a}{x-1} + \frac{b_1}{(x-2)^2} + \frac{b_2}{x-2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x^2 - 5 = a(x-2)^2 + b_1(x-1) + b_2(x-1)(x-2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 5 = ax^2 - 4ax + 4a + b_1x - b_1 + b_2x^2 - 2b_2x - b_2x + 2b_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 5 = (a + b_2)x^2 + (-4a + b_1 - 3b_2)x + 4a - b_1 + 2b_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b_2 = 2 \\ -4a + b_1 - 3b_2 = 0 \\ 4a - b_1 + 2b_2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b_1 = 3 \\ b_2 = 5 \end{cases} . \end{aligned}$$

Portanto, $R(x) = \frac{2x^2 - 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = -\frac{3}{x-1} + \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{5}{x-2}$ e

$$\begin{aligned} PR(x) &= P \frac{2x^2 - 5}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \\ &= P - \frac{3}{x-1} + P \frac{3}{(x-2)^2} + P \frac{5}{x-2} \\ &= -3 \ln|x-1| - \frac{3}{x-2} + 5 \ln|x-2|. \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 9

Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções racionais:

1. $\frac{1}{(x-4)^5}$
2. $\frac{x+16}{(x-1)^2}$
3. $\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}$
4. $\frac{x^3+1}{x^3-x^2}$

Terminamos este capítulo com exemplos de funções cuja primitivação pode reduzir-se à de funções racionais mediante uma substituição adequada de variável. (Na Tabela 2.5 são sugeridas substituições para a racionalização de algumas funções.)

EXEMPLOS 23

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}, x \in [0, +\infty[.$

Fazendo a mudança de variável $x = t^{12} = \varphi(t)$, tem-se $x' = \varphi'(t) = 12t^{11}$ e

$$\begin{aligned} Pf(x) &= P(f(\varphi(t))\varphi'(t)) = P\frac{12t^{11}}{t^6(t^4 + t^3)} = \\ &= 12P\frac{t^2}{t+1} \stackrel{(*)}{=} 12P\left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right) = \\ &= 12\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) = 6t^2 - 12t + 12\ln|t+1| = \\ &= 6\sqrt[12]{x^2} - 12\sqrt[12]{x} + 12\ln(\sqrt[12]{x} + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} (*) \quad \begin{array}{cc} t^2 & \underline{|t+1|} \\ \hline -t^2 - t & t - 1 \\ -t & \\ \hline t+1 & \\ 1 & \end{array} \end{array}$$

Assim, $t^2 = (t+1)(t-1) + 1$ e, portanto, $\frac{t^2}{t+1} = t - 1 + \frac{1}{t+1}$.

2. $f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$.

Fazendo $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ ($\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$), tem-se

$x = 2 \operatorname{arctg} t = \varphi(t)$, $x' = \varphi'(t) = \frac{2}{2+t^2}$ e assim

$$\begin{aligned} Pf(x) &= P(f(\varphi(t))\varphi'(t)) = P\frac{1 - \frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} = \\ &= P\frac{1+t^2-2t}{1+t^2} = P\left(1 - \frac{2t}{1+t^2}\right) = \\ &= P1 - P\frac{2t}{1+t^2} = t - \ln(1+t^2) = \\ &= \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \ln(1 + (\operatorname{tg} \frac{x}{2})^2). \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO 6 É de referir a existência de muitas funções elementares que, uma vez que são contínuas, são também primitiváveis, mas que os métodos aqui apresentados não conseguem primitivar. Tal deve-se a que, contrariamente com o que acontece com a

derivação, nem sempre as primitivas de funções elementares são elementares. Estão nesta situação as funções e^{-x^2} , $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$.

EXERCÍCIOS 10

1. Mostre que

$$a) P \arctg x = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$$

$$b) P \frac{x}{4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}} = \ln(\sqrt{4 - x^2} + 1)$$

$$c) P \frac{x}{\sqrt{ax + b}} = \frac{2}{3a^2}(ax - 2b)\sqrt{ax + b}, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}$$

2. Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$a) \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$b) e^x \sin e^x$$

$$c) \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

$$d) \ln(\cos x) \operatorname{tg} x$$

$$e) x\sqrt{1 - x^2}$$

$$f) \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$$

$$g) \frac{\sin x}{3 - 2 \cos x}$$

$$h) \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$i) \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$$

$$j) \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

$$k) \frac{e^{2x}}{1 + e^{4x}}$$

$$l) \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$$

$$m) \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$n) (e^x + 2)^2$$

$$o) \frac{x}{e^x}$$

$$p) x \sec^2 x$$

$$q) \sqrt{x} \ln x$$

$$r) xe^{2x}$$

$$s) x \sin \frac{x}{2}$$

$$t) \ln(x^3)$$

$$u) x \arctg x$$

$$v) \cos(\ln x)$$

$$x) \frac{x^4}{1 - x}$$

$$y) \frac{1}{x^2 + 3x - 10}$$

$$w) \frac{x - 3}{x^3 + x^2}$$

$$I) \frac{x}{(x - 1)^2}$$

$$II) \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}}$$

$$III) \frac{e^{2x} + 2e^{3x}}{1 - e^x}$$

$$IV) \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}}$$

$$V) \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$$

$$VI) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$VII) \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

3. Determine a função f duas vezes derivável em \mathbb{R}^+ e que verifica as seguintes

condições:

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} + e^{-x}, \quad f'(1) = -1 \quad \text{e} \quad f(1) = \frac{2}{e}.$$

4. Uma população de bactérias cresce à taxa de $N'(t) = 2^t$ milhões de bactérias por hora, onde $N(t)$ denota o número de bactérias ao fim de t horas. Se $N(0)=14$ (milhões), determine uma expressão para $N(t)$ e calcule a dimensão da população ao fim de 2 horas.
5. Após uma substância estranha ser introduzida no sangue de um dado animal, são produzidos anticorpos à taxa $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$ milhares de anticorpos por minuto. Determine o número de anticorpos no sangue ao fim de 4 minutos, sabendo que no instante $t = 0$ não há anticorpos.

Anexo 2.1

Função a primitivar	Primitiva
1) $k, k \in \mathbb{R}$	kx
2) $f^\alpha \cdot f', \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
3) $\frac{f'}{f}$	$\ln f $
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
4) $\sin f \cdot f'$	$-\cos f$
5) $\cos f \cdot f'$	$\sin f$
6) $\operatorname{tg} f \cdot f'$	$-\ln \cos f $
7) $\operatorname{cotg} f \cdot f'$	$\ln \sin f $
8) $\sec^2 f \cdot f'$	$\operatorname{tg} f$
9) $\operatorname{cosec}^2 f \cdot f'$	$-\operatorname{cotg} f$
10) $\sec f \cdot f'$	$\ln \sec f + \operatorname{tg} f $
11) $\operatorname{cosec} f \cdot f'$	$\ln \operatorname{cosec} f - \operatorname{cotg} f $
12) $\sec f \cdot \operatorname{tg} f \cdot f'$	$\sec f$
13) $\operatorname{cosec} f \cdot \operatorname{cotg} f \cdot f'$	$-\operatorname{cosec} f$
14) $a^f \cdot f', a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{a^f}{\ln a}$
15) $e^f \cdot f'$	e^f
16) $\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\arcsin f$
17) $\frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\arccos f$
18) $\frac{f'}{1+f^2}$	$\operatorname{arctg} f$

Tabela 2.1: Primitivas de algumas funções.

Fracção simples a primitivar $\frac{Ax+B}{(x-p)^2+q^2}^k$	Primitiva
1) $k = 1$	$\frac{Ap+B}{q} \operatorname{arctg} \frac{x-p}{q} + \frac{A}{2} \ln((x-p)^2 + q^2)$
2) $k = 2$	$\frac{Ap+B}{2q^2} \left(\frac{q(x-p)}{(x-p)^2+q^2} + \operatorname{arctg} \frac{x-p}{q} \right) - \frac{A}{2((x-p)^2+q^2)}$

Tabela 2.2: Primitivas de algumas fracções simples.

1) $P(f+g) = Pf + Pg$
2) $P\lambda f = \lambda Pf$, com $\lambda \in \mathbb{R}$
3) $P(fg) = Fg - P(Fg')$, com $F = Pf$
4) $Pf(x) = P(f(\varphi(t))\varphi'(t))$, com $x = \varphi(t)$

Tabela 2.3: Propriedades das primitivas.

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	3) $1 + \cotg^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$
2) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$	5) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
4) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$	7) $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
6) $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$	9) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
8) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	11) $\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$
10) $\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$	13) $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x/2}{1 + \operatorname{tg}^2 x/2}$
12) $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} x/2}{1 + \operatorname{tg}^2 x/2}$	
14) $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$	16) $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$
15) $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$	

Tabela 2.4: Fórmulas trigonométricas que poderão ser úteis na primitivação.

Função a primitivar	Substituição
1) $R(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2})$	$x = \frac{a}{b} \sin t$
2) $R(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2})$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{tg} t$
3) $R(x, \sqrt{b^2x^2 - a^2})$	$x = \frac{a}{b} \sec t$
4) $R(x, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{r}{s}})$ com $p, q, \dots, r, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$	$x = t^k, k = m.m.c.(q, \dots, s)$
5) $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)$ com $p, q, \dots, r, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, k = m.m.c.(q, \dots, s)$ $\left(x = \frac{dt^k - b}{a - ct^k}\right)$
7) $R(\sin x, \cos x)$	$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ $\left(\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$
8) $R(e^x)$	$x = \ln t$

Tabela 2.5: Substituições sugeridas para racionalizar $R(v_1, \dots, v_m) = \frac{P(v_1, \dots, v_m)}{Q(v_1, \dots, v_m)}$, em que $P(v_1, \dots, v_m)$ e $Q(v_1, \dots, v_m)$ são polinómios nas variáveis v_1, \dots, v_m .

Capítulo 3

Cálculo integral

3.1 Integral definido

Introdução

Historicamente o conceito de integral nasce para definir rigorosamente a noção intuitiva de área de regiões limitadas por curvas. Assim, uma das vias mais naturais para motivar o conceito de integral é precisamente o cálculo de áreas. Dada uma função $f \geq 0$ em $[a, b]$ e limitada nesse intervalo, qual será a área da região R delimitada superiormente pelo gráfico de f , inferiormente pelo eixo dos xx e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$? (Ver Figura 3.1.)

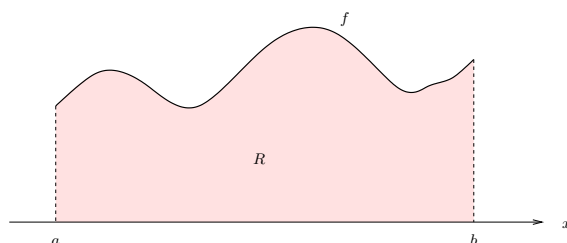


Figura 3.1: R é a região delimitada superiormente pelo gráfico de f , inferiormente pelo eixo dos xx e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

3.1. INTEGRAL DEFINIDO

Para obter um valor aproximado da área da região R é razoável proceder da seguinte forma. (A Figura 3.2 ilustra este processo.) Consideremos $n + 1$ pontos $a = x_0 <$

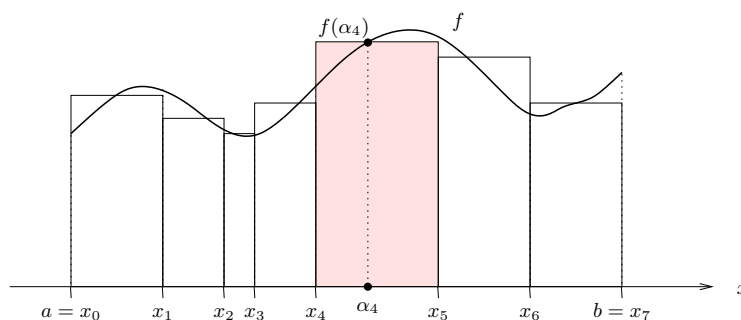


Figura 3.2: A soma das áreas dos rectângulos assinalados é um valor aproximado da área da região R da Figura 3.1.

$x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$ e em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ vamos escolher um ponto arbitrário α_i . O produto $A_i = f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1})$ é a área do rectângulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ e altura igual a $f(\alpha_i)$. Se considerarmos que cada A_i é uma aproximação razoável da área da região de R delimitada inferiormente pelo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, então a soma $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ é um valor aproximado da área de R . É claro que a aproximação será tanto melhor quanto menor forem as amplitudes dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$. Assim, vamos obter sucessivos aumentos da precisão aumentando o número n de pontos e distribuindo-os de forma a que os comprimentos dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tendam para zero. Claro que há inúmeras maneiras de seleccionar mais e mais pontos e de os distribuir no intervalo $[a, b]$ de forma a que as amplitudes dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ sejam cada vez menores. Se independentemente da forma de o fazer, as correspondentes somas $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ convergem para o mesmo valor S , diz-se que a função f é *integrável* em $[a, b]$, que S é o *integral definido* de f em $[a, b]$ e escreve-se

$$S = \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f.$$

É este o valor que define rigorosamente a área de R .

Na expressão anterior $[a, b]$ é o *intervalo de integração*, os pontos a e b são os *limites de integração*, f é a *função integranda* e x é a *variável de integração*.

EXEMPLO 24 Se $f(x) = k \geq 0$ em $[a, b]$, $\int_a^b f(x) dx = k(b - a)$ é a área do rectângulo de base $[a, b]$ e altura k .

Se $f \leq 0$ em $[a, b]$, então as somas $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ são não positivas e portanto o integral $\int_a^b f$ será também não positivo, sendo o simétrico da área da região delimitada inferiormente pelo gráfico de f , superiormente pelo eixo dos xx e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$ (ver Figura 3.3).

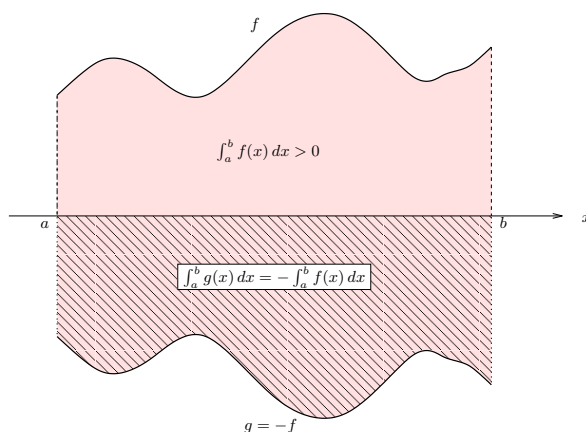


Figura 3.3: Se a função integranda tem sinal constante no intervalo, o integral tem o sinal da função integranda.

Propriedades

As funções integráveis constituem uma vasta classe de funções e existem vários resultados a estabelecer condições suficientes para a integrabilidade de funções. Destacamos o seguinte.

Proposição 3.1 *Se f é contínua em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.*

Daqui decorre directamente que as funções elementares são integráveis em qualquer intervalo fechado dos seus domínios.

A continuidade não é no entanto condição necessária para a integrabilidade. De facto tem-se o seguinte resultado.

Proposição 3.2 *Se f é limitada em $[a, b]$ com um número finito de descontinuidades, então f é integrável em $[a, b]$.*

O integral definido satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 3.3 *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis em $[a, b]$. Então,*

1. $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

2. λf , com $\lambda \in \mathbb{R}$, é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f.$$

3. (Aditividade do integral)

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \text{ com } c \in]a, b[.$$

4. Se $f \geq g$ em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

Em particular, se $f \geq 0$ em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f \geq 0.$$

5. Se $f = g$, excepto eventualmente num número finito de pontos de $[a, b]$, tem-se

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

É ainda de referir o seguinte resultado que tem uma óbvia interpretação geométrica.

Teorema 3.4 (*Teorema da média*) *Se f é contínua em $[a, b]$, existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x) \, dx = f(c)(b - a).$$

Demonstração: Da continuidade de f decorre que

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b],$$

em que m e M são, respectivamente, os valores mínimo e máximo de f no intervalo $[a, b]$.

Utilizando o resultado 4 da Proposição 3.3 tem-se

$$m(b - a) = \int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M = M(b - a),$$

donde resulta

$$m \leq \frac{\int_a^b f}{b - a} \leq M.$$

O teorema de Bolzano permite concluir que, uma vez que a função contínua f toma os valores m e M em $[a, b]$, o valor intermédio $\frac{\int_a^b f}{b - a}$ é também um valor da função em algum ponto $c \in [a, b]$. \square

Para $f \geq 0$ em $[a, b]$, o teorema da média diz que a área expressa por $\int_a^b f$ é precisamente a área de um determinado rectângulo de lado $[a, b]$ e cujo lado oposto intersecta o gráfico de f (ver Figura 3.4).

Até agora só atribuímos significado ao símbolo $\int_a^b f$ com $a < b$. É útil estabelecer a seguinte convenção.

CONVENÇÃO 1

1. $\int_a^a f = 0$.

2. Se f é uma função integrável no intervalo $[a, b]$, $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

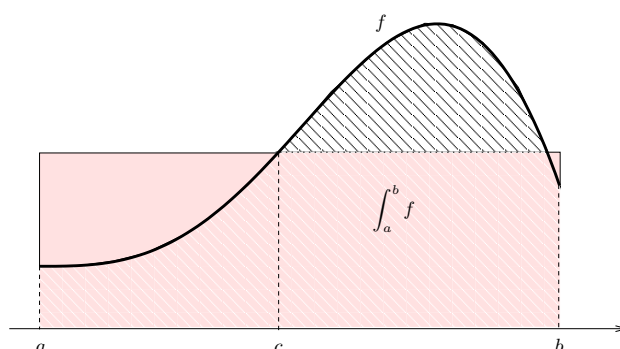


Figura 3.4: A área da região delimitada superiormente pelo gráfico de f , inferiormente pelo eixo dos xx e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$ é a mesma do que a do rectângulo assinalado.

OBSERVAÇÃO 7 Com esta convenção a propriedade 3 da Proposição 3.3 é válida qualquer que seja a posição relativa dos pontos a , b e c , desde que a função f seja integrável no maior intervalo fechado que contenha os três pontos.

Assim, por exemplo, para $a \leq b \leq c$, tem-se

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \Leftrightarrow \int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f \Leftrightarrow \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Cálculo do integral

Vamos agora ocupar-nos do cálculo do integral definido. O cálculo com base na convergência das somas $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ não é um método eficaz. É a primitivação que vai ser a chave de uma forma expedita de abordar esta questão.

Sejam $f \geq 0$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, x um ponto móvel em $[a, b]$ e consideremos a área variável $A(x)$ da região delimitada superiormente pelo gráfico de f , inferiormente pelo eixo dos xx e lateralmente pelas rectas verticais que cortam o eixo dos xx em a e em x (ver a Figura 3.5). Note que $A(a) = 0$ e $A(b) = \int_a^b f$.

Vamos mostrar que, em cada ponto de $[a, b]$, a taxa de variação da área A coincide com

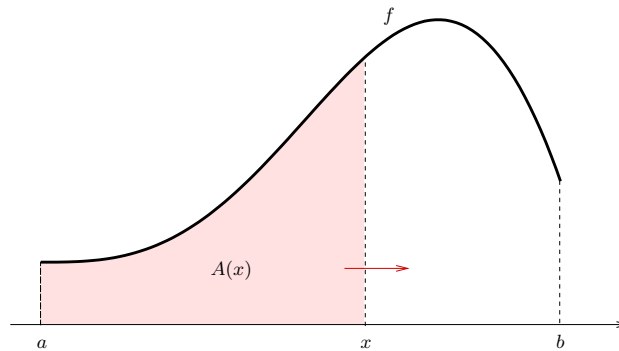


Figura 3.5: $A(x)$ é a área da região assinalada.

a altura do gráfico da função f , i.e,

$$A'(x) = f(x). \quad (3.1)$$

De facto, $A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$ que, tendo em conta o teorema da média (Teorema 3.4) aplicado ao integral definido $\int_x^{x+h} f$, pode ser escrito $A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hf(c)}{h}$, com c entre x e $x+h$. Uma vez que $h \rightarrow 0 \Rightarrow c \rightarrow x$, tem-se $A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c) = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x)$.

A expressão (3.1) estabelece que A é uma primitiva de f em $[a, b]$. Se F é uma qualquer primitiva de f em $[a, b]$, tem-se

$$A(x) = F(x) - F(a),$$

pois esta é a única primitiva de f que garante que $A(a) = 0$. Podemos assim concluir que

$$\int_a^b f = A(b) = F(b) - F(a).$$

É de notar que, ao estabelecer a fórmula anterior, a condição $f \geq 0$ não teve outro propósito senão o de permitir ilustrar os cálculos identificando integrais e áreas. Assim, é válido o seguinte resultado que permite calcular o integral $\int_a^b f$ desde que se conheça uma primitiva de f em $[a, b]$.

Teorema 3.5 (*Fórmula fundamental do cálculo integral*) Sejam f uma função contínua em $[a, b]$ e F uma qualquer primitiva de f em $[a, b]$. Tem-se,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

É usual denotar o membro direito da igualdade anterior escrevendo $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

EXEMPLOS 25

$$1. \int_0^2 dx = \int_0^2 1 dx = [x]_0^2 = 2.$$

Em geral, para $k \in \mathbb{R}$, tem-se $\int_a^b k dx = [kx]_a^b = k(b - a)$.

$$2. \int_a^b 0 dx = 0.$$

$$3. \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9.$$

$$4. \int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0.$$

$$5. \text{ Se } f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 2x dx + \int_1^2 (2x - 2) dx = \\ &= [x^2]_0^1 + [x^2 - 2x]_1^2 = 1 + 1 = 2. \text{ (Ver Figura 3.6.)} \end{aligned}$$

Nos cálculos efectuados utilizaram-se as propriedades 3 e 5 da Proposição 3.3. A propriedade 3 (aditividade do integral) serviu para decompor em $[0, 1]$, $[1, 2]$ o intervalo de integração $[0, 2]$. A propriedade 5 legitima que o cálculo de $\int_1^2 f$ se processe utilizando a função integranda $\bar{f}(x) = 2x - 2$, que é contínua em $[1, 2]$, em substituição da função f , que tem uma descontinuidade em $[1, 2]$.

$$6. \int_1^0 \frac{dx}{1+x} = - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = - [\ln(1+x)]_0^1 = -(\ln 2 - \ln 1) = -\ln 2.$$

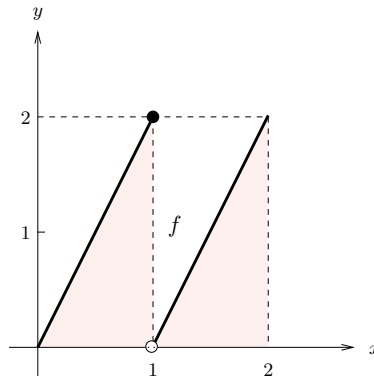


Figura 3.6: A função f é descontínua no ponto $x = 1$.

OBSERVAÇÃO 8 Se $a > b$,

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx = - [F(x)]_b^a = - (F(a) - F(b)) = F(b) - F(a).$$

Assim, a fórmula fundamental do cálculo integral aplica-se indistintamente aos casos $a < b$ e $a > b$.

A fórmula fundamental do cálculo integral remete a determinação dos valores dos integrais à identificação das primitivas das funções integrandas. Como esse assunto já foi tratado no capítulo anterior, pouco mais há a dizer sobre o cálculo do integral definido. É no entanto pertinente enunciar a contrapartida para integrais da fórmula da primitivação por substituição (Proposição 2.6). Esta fórmula não obriga a desfazer a mudança de variável.

Proposição 3.6 (*Integração por substituição.*) *Sejam I e J dois intervalos, f uma função contínua em I e $\varphi : J \rightarrow I$ com derivada contínua. Sejam ainda t_0 e t_1 dois pontos de J tais que $a = \varphi(t_0)$ e $b = \varphi(t_1)$. Então,*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt, \text{ com } x = \varphi(t).$$

EXEMPLOS 26

3.1. INTEGRAL DEFINIDO

1. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx.$

Fazendo $e^x = t \Rightarrow x = \ln t = \varphi(t)$, $t \in]0, +\infty[$, tem-se $x' = \varphi'(t) = \frac{1}{t}$ e

x	t
$a = 0$	$t_0 = e^0 = 1$
$b = 1$	$t_1 = e^1 = e$

Assim,

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int_1^e \frac{t}{1+t} \frac{1}{t} dt = \int_1^e \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_1^e = \ln(1+e) - \ln 2.$$

2. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$

Com $x = \sin t = \varphi(t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, vem $x' = \varphi'(t) = \cos t$ e

x	t
$a = 0$	$\sin t_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 = 0$
$b = 1$	$\sin t_1 = 1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}$

Assim,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

EXERCÍCIOS 11 Calcule os seguintes integrais.

1. $\int_0^1 x dx$

2. $\int_0^1 x^\alpha dx$, com $\alpha \geq 0$.

3. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} 2 - x^2 dx$

4. $\int_1^2 (2x^5 - \frac{1}{x^2}) dx$

5. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2 - \pi) dx$

6. $\int_2^3 \frac{x}{x^2 - 25} dx$

7. $\int_1^{e^2} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

8. $\int_0^2 f(x) dx$, com $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x+4}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

9. $\int_0^1 x 2^x dx$

10. $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos x) \sin x dx$

11. $\int_0^1 e^x \operatorname{arctg}(e^x) dx$

12. $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 4} dx.$

Muitos conceitos importantes e problemas de Geometria, Física, Biologia, Engenharia, Economia, etc, baseiam-se exactamente na mesma ideia subjacente ao cálculo de áreas, a de que o todo de uma quantidade pode ser obtido decompondo-o num grande número de partes convenientes e somando-as através da integração.

A seguir apresentamos alguns exemplos da grande variedade de aplicações do integral definido. No contexto das aplicações é em geral importante referir a unidade de medida de $\int_a^b f(x) dx$, que é o produto das unidades de $f(x)$ e x .

Cálculo das áreas de regiões definidas pelos gráficos de duas funções

Já vimos que, se $f \geq 0$ em $[a, b]$, $\int_a^b f(x) dx$ é a área da região delimitada superiormente pelo gráfico da função f , inferiormente pelo eixo dos xx e lateralmente pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$.

É óbvio (ver Figura 3.7) que, se $f \geq g \geq 0$ em $[a, b]$, a área da região R delimitada

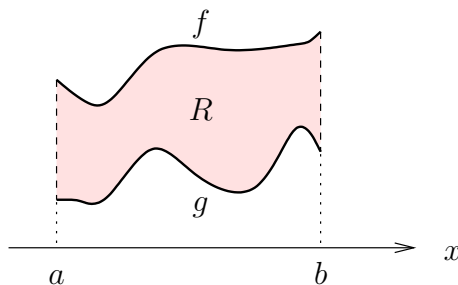


Figura 3.7: R é a região delimitada superiormente pelo gráfico de f , inferiormente pelo gráfico de g e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$.

superiormente pelo gráfico de f , inferiormente pelo gráfico de g e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$\text{área de } R = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

3.1. INTEGRAL DEFINIDO

Esta mesma fórmula aplica-se, se $f \geq g$, independentemente dos sinais de f e g . De facto, se g tomar valores negativos, podemos somar a f e a g uma dada constante positiva C de forma a que $f + C \geq g + C \geq 0$ (ver Figura 3.8). Daqui resulta uma translacção da

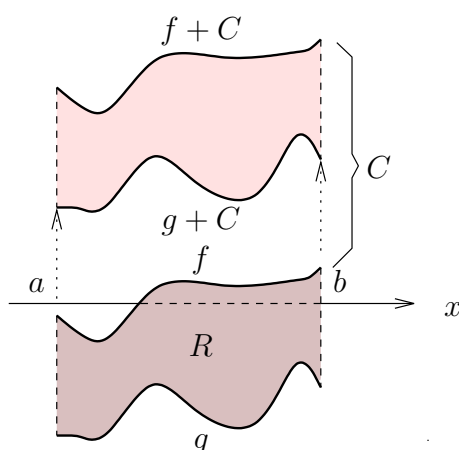


Figura 3.8: A região R e a delimitada superiormente pelo gráfico de $f + C$, inferiormente pelo gráfico de $g + C$ e lateralmente pelas rectas $x = a$ e $x = b$, têm a mesma área.

região R remetendo o cálculo da área ao caso anterior. Tem-se assim,

$$\text{área de } R = \int_a^b ((f(x) + C) - (g(x) + C)) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx,$$

tal como no caso anterior.

Consideremos agora a situação em que $f - g$ muda de sinal um número finito de vezes em $[a, b]$. Neste caso há que identificar os pontos c_1, c_2, \dots, c_n onde ocorrem as mudanças de sinal e calcular a área da região em cada um dos intervalos $[a, c_1], [c_1, c_2], \dots, [c_n, b]$. Assim, a área da região R assinalada na Figura 3.9 é dada por

$$\text{área de } R = \int_a^{c_1} (f(x) - g(x)) dx + \int_{c_1}^{c_2} (g(x) - f(x)) dx + \int_{c_2}^b (f(x) - g(x)) dx.$$

EXEMPLO 27 Vamos calcular a área da região R assinalada na Figura 3.10.

Começemos por determinar os pontos c e b .

O ponto c é a abcissa do ponto do 1º quadrante de intersecção dos gráficos de f e g .

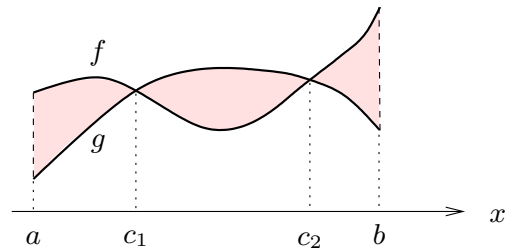


Figura 3.9: R é a região delimitada pelos gráficos das funções f e g no intervalo $[a, b]$.

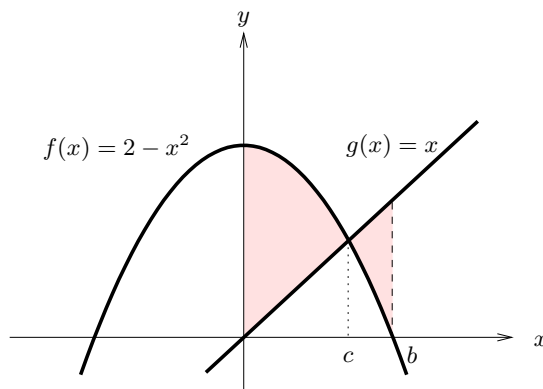


Figura 3.10: R é a região do 1º quadrante delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = x$.

Assim, $c > 0$ e $2 - c^2 = c \Leftrightarrow c = 1$.

O ponto b é o zero positivo da função f , i.e, $b > 0$ e $2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow b = \sqrt{2}$.

Tem-se pois

$$\begin{aligned}
 \text{área de } R &= \int_0^c (f(x) - g(x)) \, dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) \, dx = \\
 &= \int_0^1 (2 - x^2 - x) \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} (x - 2 + x^2) \, dx \\
 &= \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{x^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} = \\
 &= \frac{7}{6} + \left(\frac{13}{6} - \frac{4}{3}\sqrt{2} \right) = \frac{10}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 12

1. Calcule a área das seguintes regiões:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \quad -x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

b) (2º Teste 2006/07 - Módulo I)

Determine a área da região definida pelos gráficos das funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x - \frac{\pi}{2}$ no intervalo $[0, \pi]$.

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, \quad x^2 - 1 \leq y \leq \arccos x\}$

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + y \leq 2, \quad y \geq x^2 - 4\}$

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\sin x| \leq y \leq e^x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi\}$.

f) (2º Teste 2006/07 - Módulo I)

Determine a área da região definida por $\{(x, y) : |\cos x| \leq y \leq x + 1, x \leq \pi\}$.

2. Calcule a área da região contida no semi-plano $x \geq 1$ e delimitada pelas curvas $y = x^2$, $x = y^2$ e $y = 4$.

3. Calcule a área da região do plano delimitada pelas curvas $y = \sin x$ e $y = \cos x$ e pelas rectas $x = 0$ e $x = 2\pi$.

Outras aplicações

Varição total

A taxa de variação de uma quantidade $F(x)$ é dada por $F'(x)$. Então, a variação total de F entre $x = a$ e $x = b$, $F(b) - F(a)$, é dada por $\int_a^b F'(x) dx$ (Teorema Fundamental do Cálculo Integral), ou seja, o integral definido de uma taxa de variação representa a variação total.

EXEMPLO 28 As taxas de crescimento das alturas de duas árvores (em metros por ano) estão representadas na Figura 3.11.

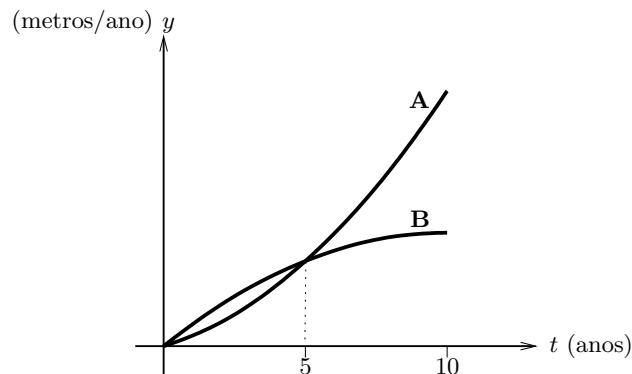


Figura 3.11: Taxas de crescimento das alturas de duas árvores.

Se as árvores têm a mesma altura no instante $t = 0$, qual é a mais alta ao fim de 5 anos? E ao fim de 10 anos?

A variação total da altura de cada árvore ao fim de t anos é dada pela área da região abaixo da correspondente curva no intervalo $[0, t]$ (ver Figura 3.11). Logo, ao fim de 5 anos, a árvore B é a mais alta, enquanto que ao fim de 10 anos é a árvore A.

Valor médio

Como determinar o “valor médio” de uma função contínua em $[a, b]$? Como primeira aproximação vamos determinar a média de valores de f calculados em n pontos x_1, x_2, \dots, x_n de $[a, b]$. O valor médio de f vem

$$f_{\text{med}} \approx \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Supondo que os pontos x_1, \dots, x_n estão igualmente espaçados, a distância entre quaisquer dois pontos é $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Podemos agora escrever

$$f_{\text{med}} \approx \frac{f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x}{b-a}.$$

Obviamente que quanto maior for n melhor será esta aproximação. Fazendo $n \rightarrow +\infty$, a

3.1. INTEGRAL DEFINIDO

soma anterior converge precisamente para $\int_a^b f(x) dx$. Assim, define-se

$$f_{\text{med}} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$

Na Figura 3.12, identificamos graficamente o valor médio da função com a altura do retângulo de base $[0, 5]$ cuja área é igual à área abaixo da curva.

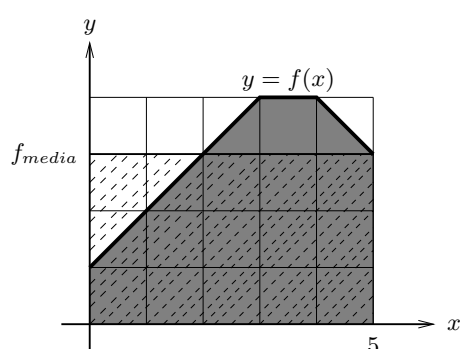


Figura 3.12: Taxas de crescimento da altura de duas árvores.

EXEMPLO 29 Suponha que a temperatura T do ar (em $^{\circ}C$) ao longo de um dado dia é dada por $T = 0.001t^4 - 0.28t^2 + 25$, em que $t \in [0, 24]$ é o tempo em horas. A temperatura média do ar desse dia é $T_{\text{med}} = \frac{\int_0^{24} 0.001t^4 - 0.28t^2 + 25 dt}{24} = 37.595^{\circ}C$.

Probabilidades

Na tomada de decisões é importante saber como uma certa característica ou variável se distribui numa população, por exemplo, a altura numa população de árvores, o peso numa população de suínos, etc. No caso da variável em estudo poder assumir uma infinidade (não numerável) de valores (variável aleatória contínua), a descrição da respectiva distribuição pode ser feita através da função densidade de probabilidade.

Uma função densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma variável aleatória é uma função $y = f(x)$ (Figura 3.13) que satisfaz as seguintes condições

1. $f(x) \geq 0$, para todo o x , e
2. a área abaixo do gráfico de f é igual a 1.

Se X é uma variável aleatória com f.d.p. f , a probabilidade de X tomar valores num dado intervalo é igual à área da região delimitada pelo gráfico de f no intervalo.

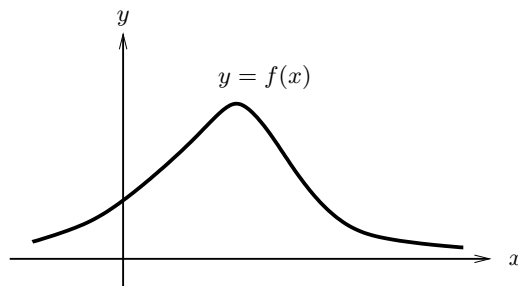


Figura 3.13: Função densidade de probabilidade.

O conceito de integral permite então escrever

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

EXEMPLO 30 Suponha que X é a concentração diária (em ppm) de monóxido de carbono (CO) na atmosfera numa dada zona urbana, e que a função densidade de X é

$$f(x) = 3.4e^{-3.4x}, \quad x \geq 0.$$

Pretende-se determinar i) a probabilidade de a concentração de CO estar entre 1 ppm e 2 ppm e ii) a proporção de dias em que a concentração de CO excede 2 ppm.

Assim, i) $P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 f(x) dx = 0.03229$ e ii) Uma vez que $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \int_0^2 f(x) dx = 1.1138 \times 10^{-3}$, a proporção é de 1.1138 dias em 1000.

Trabalho

3.1. INTEGRAL DEFINIDO

O trabalho realizado por uma força de intensidade constante F quando o deslocamento d do ponto de aplicação da força tem a mesma direcção e sentido da força é dado por $W = F d$ ($W = -F d$ quando o sentido do deslocamento é contrário ao da força).

Se a intensidade $F(x)$ da força depende da posição x do ponto de aplicação, então o trabalho realizado pode ser calculado decompondo o deslocamento em deslocamentos muito pequenos de forma a considerar a intensidade da força constante relativamente a cada um deles. O trabalho resultante é obtido através da soma dos trabalhos realizados usando o processo de integração. Assim, $W = \int_a^b F(x) dx$, quando o deslocamento ocorre de a até b na mesma direcção e sentido da força.

EXEMPLO 31 Um corpo é elevado do solo à altura de 10 m por acção de uma força de intensidade (em newton) dada por $F(x) = 200 + 3(10 - x)$, em que x é a altura do corpo (em metros). O trabalho realizado por esta força é $W = \int_0^{10} F(x) dx = 2150$ J.

EXERCÍCIOS 13

- Um insecto voa (num período limitado de tempo) com a velocidade $v(t) = 10 + 8t - t^2$ metros por segundo.
 - Trace o gráfico de $v(t)$ e identifique geometricamente a distância percorrida pelo insecto durante os primeiros cinco segundos.
 - Calcule essa distância.
- A taxa de variação diária da quantidade de água numa planta (em gramas por hora) é dada por $V'(t) = -0.041667t(24-t) + 4$, em que t é o tempo em horas ($0 \leq t \leq 24$). Será que ao fim do dia a planta perdeu ou ganhou água?
- O perfil de um dado solo revelou que a concentração de azoto (em g/m^3) é dada por $y = 673.8 - 34,7x$, em que $x \in [0, 10]$ é a profundidade do solo (em m). Calcule a concentração média de azoto no solo.

4. A população P (em milhões de pessoas) de um dado país é dada por $P = 67.38(1.026)^t$, em que t é o tempo em anos desde 1980. Qual é a população média entre 1980 e 1990?

5. Suponha que X mede o tempo (em horas) que um estudante demora a concluir uma prova de exame cuja duração é de duas horas, e que a função densidade de X é

$$f(x) = \frac{x^3}{4}, \quad x \in [0, 2].$$

a) Qual é a probabilidade de um estudante demorar entre 1.5 h e 2h a fazer o exame?

b) Determine a tal que $\int_0^a f(x) dx = 0.5$. Interprete o parâmetro a no contexto do problema.

6. Seja $f(x) = 0.1e^{-0.1x}$ para $x \geq 0$, a função densidade do tempo de espera (em minutos) de uma pessoa numa paragem de autocarros.

a) Qual é a probabilidade de o tempo de espera não exceder 5 min?

b) Qual é a percentagem de pessoas que espera mais de 1/2 h?

7. Uma bola de ferro é atraída por um íman com um força $F = \frac{15}{x^2}$ N quando a bola está a x metros do íman.

a) Calcule o trabalho realizado pela força quando a bola sofre um deslocamento de 4 m na mesma direcção e em sentido contrário aos da força, supondo que a bola e o íman se encontravam à distância de 2 m.

b) Calcule a força média aplicada na bola na situação descrita em a).

3.2 Integral indefinido

Dada uma função f integrável em $[a, b]$, vamos estudar a função

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ com } x \in [a, b],$$

cujo valor depende do limite superior do integral. A função $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *integral indefinido* de f (com origem em a).

Geometricamente, se $f \geq 0$ em $[a, b]$, esta função representa a área variável que introduzimos ao estabelecer a fórmula fundamental do cálculo integral e que então denotámos por $A(x)$ (ver Figura 3.5).

OBSERVAÇÕES 9

1. A variável utilizada no limite superior de integração e a variável de integração que figuram na expressão da função φ não podem ser representadas pelo mesmo símbolo, pois têm papéis distintos.
2. Em cada ponto $x = c$ do intervalo $[a, b]$, o valor de φ é o integral definido $\varphi(c) = \int_a^c f(t) dt$. Em particular, $\varphi(a) = 0$.

EXEMPLOS 32

1. Consideremos $\varphi(x) = \int_1^x f(t) dt$, com $x \in [1, 5]$ e em que $f(t) = \frac{1}{t}$. (Ver Figura 3.14.)

Como $f > 0$ em $[1, 5]$, a função φ é crescente pois para quaisquer $x_1 > x_0$, a área $\varphi(x_1) = \varphi(x_0) + \text{área de } R > \varphi(x_0)$. Esta propriedade é uma consequência da natureza cumulativa do integral indefinido. Lê-se bem no gráfico da função $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^x = \ln x$ o acréscimo: área de $R = \varphi(x_1) - \varphi(x_0)$.

2. Consideremos $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt$, com $x \in [0, 2]$ e em que $f(t) = \begin{cases} 2 & 0 \leq t \leq 1 \\ t^2 & 1 < t \leq 2 \end{cases}$.

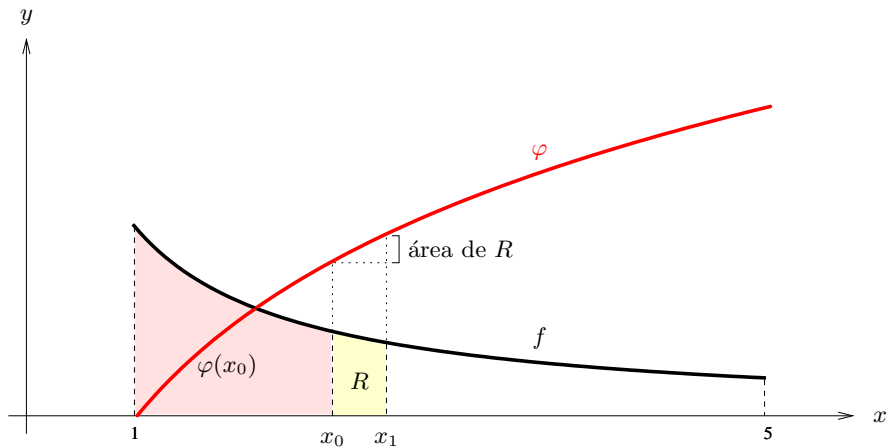


Figura 3.14: A função crescente φ é o integral indefinido de $f > 0$ no intervalo $[1, 5]$.

Para $x \in [0, 1]$,

$$\varphi(x) = \int_0^x 2 \, dt = 2[t]_0^x = 2x.$$

Para $x \in]1, 2]$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^x f(t) \, dt = \int_0^1 f(t) \, dt + \int_1^x f(t) \, dt = \int_0^1 2 \, dt + \int_1^x t^2 \, dt = \\ &= [2t]_0^1 + \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^x = 2 + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} = \\ &= \frac{x^3 + 5}{3}. \end{aligned}$$

Note que, apesar de f ser descontínua em $x = 1$, o integral indefinido φ é uma função contínua em $[0, 2]$ (ver Figura 3.15). Esta propriedade é também consequência da natureza cumulativa do integral indefinido que é insensível a descontinuidades num número finito de pontos da função integranda.

A função integral indefinido $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) \, dt, \text{ com } x \in [a, b]$$

verifica três importantes propriedades que enunciamos em seguida. As duas primeiras foram ilustradas nos Exemplos 32.

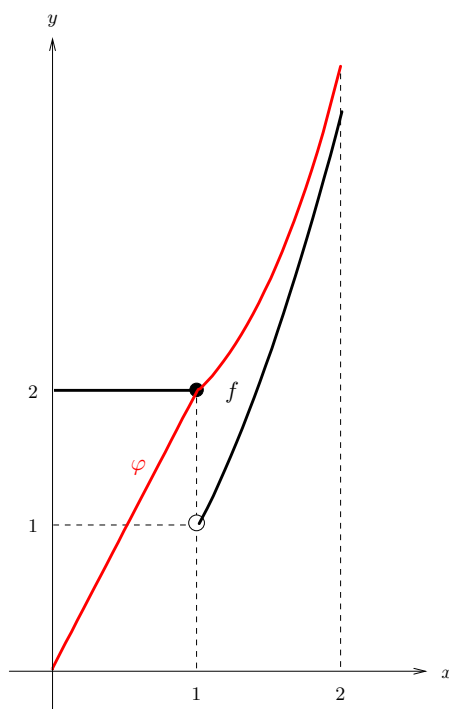


Figura 3.15: A função contínua φ é o integral indefinido de f no intervalo $[0, 2]$.

Proposição 3.7 Se $f \geq 0$ em $[a, b]$, então φ é crescente em $[a, b]$.

Proposição 3.8 A função φ é contínua em $[a, b]$, i.e., para todo o ponto $x_0 \in [a, b]$ tem-se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0), \text{ escrito de outro modo } \lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt.$$

A terceira propriedade foi anteriormente provada ao estabelecer-se a igualdade (3.1) ($A'(x) = f(x)$). Na altura fez-se referência que a condição $f \geq 0$ apenas foi usada para identificar $A(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Proposição 3.9 Se f é contínua em $[a, b]$, então φ é derivável em $[a, b]$ e

$$\varphi'(x) = f(x), \text{ ou de forma equivalente } \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x), \text{ com } x \in [a, b].$$

Assim, se f é contínua existe uma função - o integral indefinido - cuja derivada é f . Portanto tem-se o seguinte.

Proposição 3.10 *Se f é contínua em $[a, b]$, então f é primitivável em $[a, b]$ e $Pf(x) = \int_a^x f(t) dt$.*

Fica assim provado o Teorema 2.2 enunciado no capítulo sobre primitivação de funções.

OBSERVAÇÕES 10

1. A Proposição 3.10 garante a possibilidade de definir uma primitiva Pf de qualquer função contínua f , mesmo quando Pf não é elementar. Por exemplo, a primitiva de $f(x) = e^{-x^2}$, que se anula em $x = 1$, é $Pe^{-x^2} = \int_1^x e^{-t^2} dt$.

2. A Proposição 3.9 permite derivar toda a função escrita na forma $\int_a^x f(t) dt$, sem necessidade de calcular o integral, desde que a função integranda f seja contínua. Por exemplo, para $x \geq 0$, tem-se

$$\left(\int_0^x \frac{t^3}{1+t^2} dt \right)' = \frac{x^3}{1+x^2}.$$

Terminamos o estudo do integral indefinido referindo que, tal como para o integral definido, tem significado considerar o integral indefinido com o limite superior de integração à esquerda da origem do integral. Todas as propriedades anteriormente enunciadas mantêm-se válidas independentemente da posição de x em relação à origem a .

EXEMPLO 33 Considere $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$. Dado que a função integranda é contínua em \mathbb{R} , $\varphi(x)$ está definida para todo o $x \in \mathbb{R}$ e é derivável, com $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$, o que permite concluir que φ é estritamente crescente em \mathbb{R} . Como $\varphi(1) = 0$, a monotonia assegura que $\varphi(x) < 0$, para $x < 1$ e $\varphi(x) > 0$, para $x > 1$. O estudo de outras características do integral indefinido φ , como por exemplo o contradomínio e assíntotas não verticais, requer a determinação de $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$, exigindo o cálculo de uma primitiva da função integranda.

EXERCÍCIOS 14

3.2. INTEGRAL INDEFINIDO

1. Determine uma expressão para $\int_0^x (te^t - te) dt$ onde não figure o símbolo do integral.

2. Considere $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 3 \\ -1, & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$. Represente graficamente a função $\int_0^x f(t) dt$, com $x \in [0, 4]$.

3. Escreva a função $\int_{-2}^x t|t - 1| dt$ sem recurso ao símbolo do integral.

4. Considere a função $F(x) = \int_0^x (3 - \sin^2 t) dt$.

a) Mostre que F é estritamente crescente em \mathbb{R} .

b) Indique uma equação da recta tangente ao gráfico de F em $x = 0$.

5. Considere $F(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$, com $x > 0$. Estude a monotonia de F e o sentido da concavidade do gráfico de F em \mathbb{R}^+ .

6. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \int_0^x e^{-t} dt}{e^{x^3} - 1}$.

7. Seja T o tempo (em dias) ao fim do qual um animal doente se restabelece depois de ter sido submetido a um tratamento. A função densidade de probabilidade de T é

$$f(t) = ce^{-ct} \text{ com } t \geq 0, \text{ e em que } c \text{ é uma constante positiva.}$$

Considere $F(t) = \int_0^t f(x) dx$, $t \geq 0$.

a) Interprete F no contexto do problema.

b) Determine uma expressão para F em que não figure o símbolo do integral.

c) Calcule a probabilidade de um animal se restabelecer ao fim do quarto dia após o tratamento.

3.3 Integral impróprio

Vamos generalizar a noção de integral aos casos em que o intervalo de integração é não limitado ou a função integranda tem limite infinito num extremo do intervalo de integração. Assim, vamos atribuir significado, por exemplo, aos integrais $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ e $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ (ver Figura 3.16). Para isto vamos tomar limites da função integral indefinido. Mais precisa-

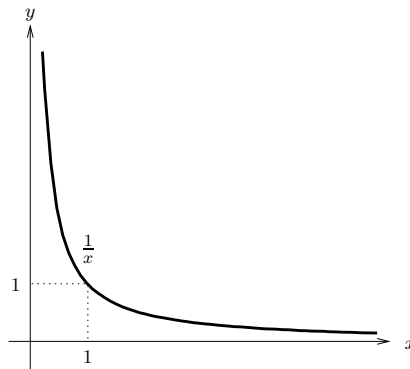


Figura 3.16: Gráfico da função $\frac{1}{x}$, com $x > 0$.

mente,

- (i) (caso em que o intervalo de integração não é limitado) se f é uma função contínua em $[a, +\infty[$, vamos calcular o limite quando $x \rightarrow +\infty$ da função $F(x) = \int_a^x f$ (ver Figura 3.17 a)). Se este limite existir, chama-se *integral impróprio* de f em $[a, +\infty[$ e escreve-se

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt.$$

- (ii) (Caso em que a função integranda tem limite infinito num extremo do intervalo de integração) se f é uma função contínua em $]a, b]$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, vamos calcular o limite quando $x \rightarrow a^+$ da função $G(x) = \int_x^b f$ (ver Figura 3.17 b)). Se este limite existir, chama-se *integral impróprio* de f em $]a, b]$ e escreve-se

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt.$$

3.3. INTEGRAL IMPRÓPRIO

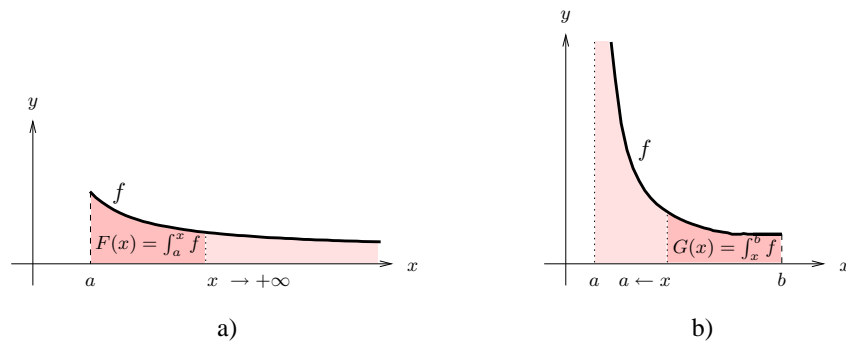


Figura 3.17: Integral impróprio: a) caso em que o intervalo de integração é $[a, +\infty[$; b) caso em que a função integranda tem limite infinito em a .

Quando o limite é finito, diz-se que o correspondente integral impróprio é *convergente*. Caso contrário, o integral impróprio é *divergente*.

Se $f > 0$, o integral impróprio é a área da região ilimitada definida pela função no intervalo de integração. Para cada uma das funções representadas na Figura 3.17 está assinalada a correspondente região.

EXEMPLOS 34

1. Para a função $f(t) = \frac{1}{t}$ tem-se

$$(i) \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln t]_1^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

$$(ii) \int_0^1 \frac{1}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln t]_x^1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty.$$

Assim, os dois integrais impróprios são divergentes.

2. Para a função $f(t) = \frac{1}{t^2}$ tem-se,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = 0 - (-1) = 1.$$

O integral impróprio é convergente e a região ilimitada definida por $\frac{1}{t^2}$, com $t \in [1, +\infty[$, tem área 1.

3. Para a função $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ tem-se,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{t} \right]_x^1 = 2.$$

O integral impróprio é convergente e a região ilimitada definida por $\frac{1}{\sqrt{t}}$, com $t \in]0, 1]$, tem área 2.

Os integrais impróprios do exemplo anterior são casos particulares de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ e $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$, chamados *integrais de Dirichlet*. Estes integrais são frequentemente utilizados, como veremos à frente, para decidir sobre a natureza (convergência ou divergência) de vários integrais impróprios.

Na Figura 3.18 estão representados gráficos das funções $\frac{1}{t^\alpha}$, com $t > 0$, para diferentes valores de α . O valor de $\alpha = 1$ é uma fronteira no que respeita à natureza dos integrais

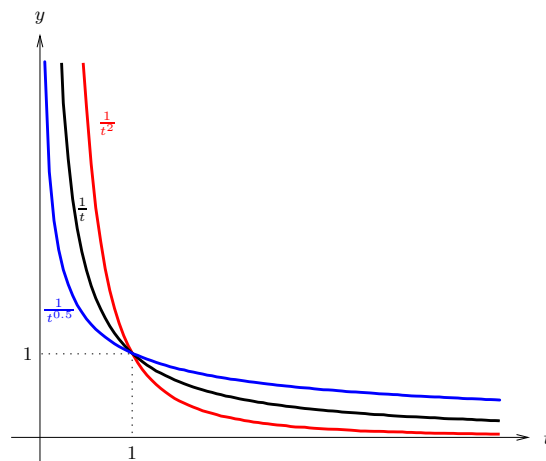


Figura 3.18: Gráficos de algumas funções $\frac{1}{t^\alpha}$, com $t > 0$, com $\alpha = 1, 2$ e 0.5 .

de Dirichlet. De facto, tem-se os seguintes resultados.

Proposição 3.11

$$(i) \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

3.3. INTEGRAL IMPRÓPRIO

$$(ii) \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

EXERCÍCIO 15 Prove a Proposição 3.11.

Existem outros tipos de integrais impróprios de funções contínuas. Nomeadamente,

1. Integral impróprio de f em $] -\infty, b]$, i.e.,

$$\int_{-\infty}^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t) dt.$$

Por exemplo,

$$\int_{-\infty}^0 e^t dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 e^t dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^t]_x^0 = 1.$$

2. Integral impróprio de f em $[a, b[$, quando $\lim_{t \rightarrow b^-} f(t) = \infty$ i.e.,

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt.$$

Por exemplo, para $f(t) = \frac{t}{1-t^2}$, em que $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = +\infty$, tem-se

$$\int_0^1 \frac{t}{1-t^2} dt = \lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x \frac{t}{1-t^2} dt = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[-\frac{1}{2} \ln(1-t^2) \right]_0^x = +\infty. \text{ Neste caso o integral impróprio é divergente.}$$

3. Integral impróprio de f em $]a, b[$, que contempla as situações em que $a = -\infty$ e $b = +\infty$ ou $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow b^-} f(t) = \infty$, entre outras.

O integral impróprio $\int_a^b f$, em $]a, b[$, diz-se convergente se para algum ponto $c \in]a, b[$, os integrais impróprios $\int_a^c f$ e $\int_c^b f$ são ambos convergentes. Neste caso, escreve-se

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Verifica-se facilmente que a convergência e o valor do integral impróprio não dependem da escolha do ponto c .

O integral impróprio $\int_a^b f$ em $]a, b[$, é divergente se algum dos integrais impróprios

$\int_a^c f$ ou $\int_c^b f$ é divergente.

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 \frac{1}{1+t^2} dt + \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\operatorname{arctg} t]_x^0 + \lim_{y \rightarrow +\infty} [\operatorname{arctg} t]_0^y = \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x + \lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} y = \pi. \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS 16 Estude a natureza de cada um dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, indique o seu valor.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} dx$ | 2. $\int_0^2 \frac{1}{4-x^2} dx$ | 3. $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$ |
| 4. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ | 5. $\int_0^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ | 6. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ |
| 7. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$ | 8. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$ | 9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx$ |
| 10. $\int_0^1 \frac{1}{x(x-1)} dx$. | | |

EXERCÍCIO 17 A taxa à qual as aves de uma dada região adoecem durante uma epidemia de gripe (em número de aves por dia) é dada por $R(t) = 1000te^{-0.5t}$, em que t é medido em dias desde o início da epidemia. Traduza através do integral impróprio o número total de aves atingidas e calcule o seu valor.

Vamos agora estabelecer alguns critérios de convergência para os integrais impróprios de funções contínuas em $[a, b[$, podendo b ser finito ou $+\infty$. Os critérios que iremos apresentar adaptam-se de forma óbvia aos integrais impróprios em intervalos dos outros tipos.

Começemos por referir os seguintes resultados evidentes.

3.3. INTEGRAL IMPRÓPRIO

OBSERVAÇÕES 11

1. Para todo o ponto $c \in [a, b[$, os integrais impróprios $\int_a^b f$ e $\int_c^b f$ têm a mesma natureza
2. Para todo o $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, os integrais impróprios $\int_a^b f$ e $\int_a^b \lambda f$ têm a mesma natureza.

O primeiro critério que enunciamos aplica-se a funções f e g não negativas em $[a, b[$. O critério estabelece que, estando o gráfico de f acima do de g , a área da região definida por f em $[a, b[$ não é inferior à da região definida por g no mesmo intervalo (ver Figura 3.19).

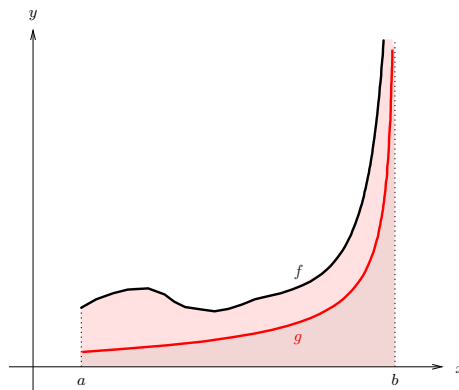


Figura 3.19: A área da região definida por f em $[a, b[$ não é inferior à da região definida por g em $[a, b[$.

Mais precisamente,

Proposição 3.12 (*1º critério de comparação*) *Sejam f e g funções contínuas em $[a, b[$, com $f \geq g \geq 0$ e $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = +\infty$ ou $b = +\infty$.*

1. *Se $\int_a^b f$ converge, então $\int_a^b g$ converge.*
2. *Se $\int_a^b g$ diverge, então $\int_a^b f$ diverge.*

EXEMPLOS 35

1. Vamos estudar a natureza do integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx$.

Como, $\frac{1}{x^2} \geq \frac{\sin^2 x}{1+x^2} \geq 0$ em $[1, +\infty[$, a convergência do integral de Dirichlet $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ permite concluir que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx$ é convergente.

2. Atendendo a que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+2x}} = +\infty$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+2x}} dx$ é integral impróprio em $]0, 1]$.

Para $x > 0$, $\sqrt{x+2x} > \sqrt{x}$ e portanto $\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x+2x}} > 0$. Como $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ é um integral de Dirichlet convergente, o integral impróprio $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+2x}} dx$ é também convergente.

3. Para estudar a natureza do integral impróprio $\int_e^{+\infty} \frac{2}{\ln x} dx$, recorremos ao integral de Dirichlet $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$.

Atendendo às Observações 11 os integrais $\int_e^{+\infty} \frac{2}{\ln x} dx$ e $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx$, bem como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ e $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ têm a mesma natureza.

Uma vez que em $[e, +\infty[$, $0 \leq \ln x \leq x$, tem-se $\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{x} \geq 0$. A divergência do integral impróprio $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ assegura que $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx$ e, conseqüentemente, $\int_e^{+\infty} \frac{2}{\ln x} dx$ são também divergentes.

O segundo critério, que se aplica também a funções f e g não negativas no intervalo $[a, b[$, utiliza a razão $\frac{f}{g}$.

Proposição 3.13 (*2º critério de comparação*) *Sejam f e g funções não negativas e contínuas em $[a, b[$, com $g \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = +\infty$ ou $b = +\infty$. Se $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0, +\infty$, os integrais impróprios $\int_a^b f$ e $\int_a^b g$ são ambos convergentes ou ambos divergentes.*

EXEMPLOS 36

1. Vamos estudar a natureza do integral impróprio $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x} dx$.

Note que para $x \in [1, +\infty[$, $\frac{1}{x} \in]0, 1]$ e conseqüentemente $\sin \frac{1}{x} > 0$.

3.3. INTEGRAL IMPRÓPRIO

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \neq 0, +\infty$, o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x} dx$ é divergente tal como o integral de Dirichlet $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$.

2. Dado que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} = +\infty$, $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$ é integral impróprio em $]1, 2]$.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x\sqrt{x-1}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 \neq 0, +\infty$. Atendendo a que o integral impróprio $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{y \rightarrow 1^+} \int_y^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{y \rightarrow 1^+} [2\sqrt{x-1}]_y^2 = 2$, conclui-se que $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$ é convergente.

3. Para decidir sobre a convergência de $\int_1^{+\infty} \frac{2x-1}{x^3-x+4}$ utilizamos o integral de Dirichlet $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ que é convergente.

Ora, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x-1}{x^3-x+4}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x^2}{x^3 - x + 4} = 2 \neq 0, +\infty$ e portanto $\int_1^{+\infty} \frac{2x-1}{x^3-x+4}$ é também convergente.

EXERCÍCIOS 18 Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$

2. $\int_1^{+\infty} \frac{x+4}{e^x} dx$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-|\sin x|}}{x} dx$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2} dx$

5. $\int_0^1 \ln \frac{1}{x} dx$

6. $\int_0^1 \frac{1 + \sin^2 x}{x} dx$

7. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$

8. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(2-x)} dx$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \cos x} dx$.

Terminamos com um resultado que poderá ser útil para deduzir a convergência de integrais impróprios quando a função integranda f não tem sinal constante no intervalo de integração, que se pode facilmente provar usando as desigualdades $0 \leq |f| + f \leq 2|f|$.

Proposição 3.14 *Seja f uma função contínua em $[a, b[$, com $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$ ou $b = +\infty$.*

Se o integral impróprio $\int_a^b |f|$ converge, então $\int_a^b f$ também converge.

EXEMPLO 37 Para estudar a natureza do integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$, consideramos $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{1+x^2} dx$.

Uma vez que $0 \leq \frac{|\sin x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ e o integral de Dirichlet $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente, do 1º critério de comparação conclui-se que $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{1+x^2} dx$ é convergente e, pela Proposição 3.14 que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ também converge.

EXERCÍCIOS 19

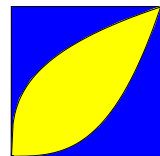
1. Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx & \text{b) } \int_1^3 |2-x| dx & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x e^{t^2} dt \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x e^{-t^2} dt}{1 - e^{-x^2}} & & \end{array}$$

2. Calcule a área de cada uma das seguintes regiões.

- a) $\{(x, y) : y \geq e^x, y \geq e^{-x}, y \leq 2\}$
- b) $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -e^x \leq y \leq x^2\}$
- c) $\{(x, y) : y \geq (x-1)^2, y \leq 1-x^2\}$
- d) $\{(x, y) : \ln x \leq y \leq e^x, y \geq -x+1, x \leq e\}$

3. Um industrial de cerâmica pretende fabricar azulejos quadrados com duas cores, azul e amarelo, com o padrão ilustrado na figura ao lado. A região amarela é delimitada pelos gráficos das funções x^α e $x^{\frac{1}{\alpha}}$, com $\alpha > 1$. Determine α de forma que as duas cores ocupem áreas iguais.



4. Determine uma expressão para a função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt, \text{ com } f(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } t \leq 0 \\ e^t - 1 & \text{se } t > 0 \end{cases},$$

onde não figure o símbolo do integral.

5. Considere a função $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt, \text{ com } f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t+1}} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{1+t^2} & \text{se } t > 1 \end{cases}.$$

3.3. INTEGRAL IMPRÓPRIO

a) Determine uma expressão para a função φ que não utilize o símbolo do integral.

b) Calcule $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

6. Estude a natureza de cada um dos seguintes integrais impróprios.

a) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} dx$ b) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{2+x^2} dx$.

7. Calcule o valor de cada um dos seguintes integrais impróprios.

a) $\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) dx$ b) $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$.

8. Determine β que satisfaz $\int_{-\infty}^{+\infty} \beta e^{-5|x|} dx = 1$.

9. Considere a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt, \text{ com } f(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{se } t < 0 \\ \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}.$$

a) Calcule $F(1)$.

b) Determine $F'(x)$.

c) Para $g(x) = x^2$, identifique $(F(g(x)))'$.

d) Determine $c \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{-1}^{+\infty} f(x) dx = F(1) + c$.

10. (2º Teste 2006/07 - Módulo I)

Considere a função $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

a) Calcule $\int_0^1 f(x) dx$.

b) Indique uma expressão para $\int_0^x f(t) dt$, com $x \in \mathbb{R}_0^+$, em que não figure o símbolo do integral.

c) Calcule $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

d) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação

existe um par $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$, com $x_1 < x_2$, tal que $\int_0^{x_1} f(t) dt > \int_0^{x_2} f(t) dt$.

11. (2º Teste 2006/07 - Módulo I)

Considere as funções $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ e $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$, com $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule $F(1)$ e $F'(1)$.

b) Indique, justificando, a natureza do integral impróprio $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

c) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação

existe um par $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $F(x_1) = F(x_2)$.