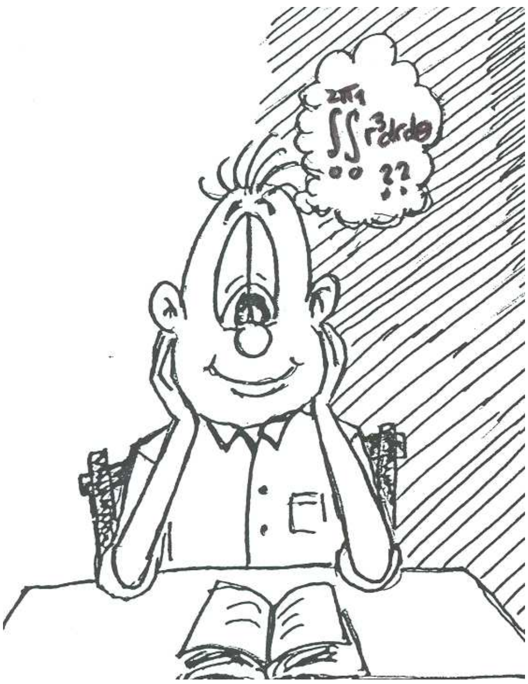
Matemática e Informática

Tópicos de Funções de Várias Variáveis



Instituto Superior de Agronomia

- 2007 -

Nestes apontamentos expôe-se a componente de Cálculo Diferencial e Integral para Funções de Várias Variáveis da Unidade Curricular *Matemática e Informática*, do 1^o Ano, do 1^o Ciclo de todos os cursos adaptados a Bolonha, do Instituto Superior de Agronomia. Este material vai ocupar parte dos módulos 3 e 4 em que a disciplina está formatada.
O texto foi adaptado de “Apontamentos de Análise Matemática II” de Isabel Faria, Ana Isabel Mesquita, Jorge Cadima e Pedro Silva, e de “Lições de Matemática II” de Pedro Silva.

Isabel Faria
Pedro Silva
Ana Isabel Mesquita
ISA, Fevereiro de 2008

Conteúdo

Capítulo 1

Tópicos de cálculo diferencial

O objectivo deste capítulo é generalizar noções e técnicas de cálculo, conhecidas para funções de uma variável, a funções com mais que uma variável.
Vamos limitar-nos a estabelecer as definições para o caso de funções de duas variáveis, o que simplificará muito a notação. A adaptação destes conceitos para as funções com mais do que duas variáveis não introduz, em geral, novas dificuldades.

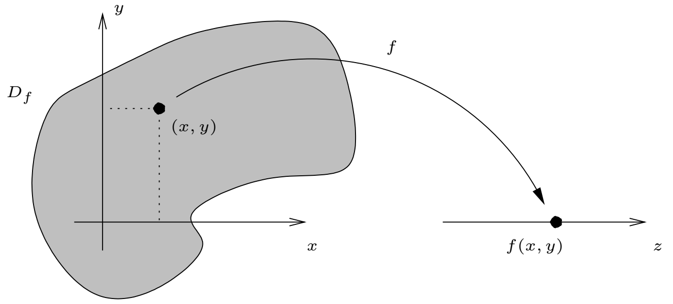
1.1 Domínio, curva de nível e gráfico. Superfícies quádricas. Continuidade

Consideremos uma função real de duas variáveis

$$\begin{array}{rrcl} f: & D_f \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}, \\ & (x,y) & \mapsto & z = f(x,y). \end{array}$$

Designamos o conjunto D_f por *domínio*[1] de f, as variáveis x, y por *variáveis independentes* e a variável z por *variável dependente* (de x e y).

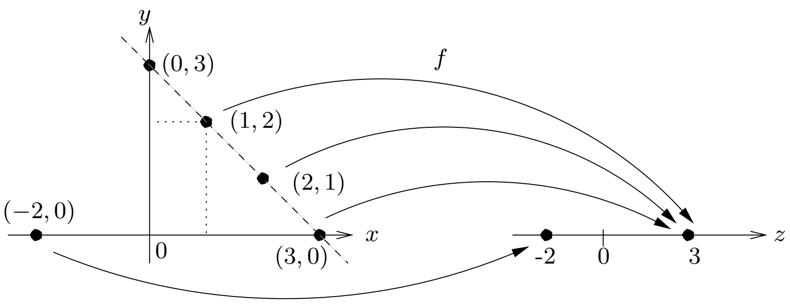
[1]Se nada for dito em contrário, o domínio de uma função é o maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ onde a expressão que a define tem significado.



Vejamos alguns exemplos.

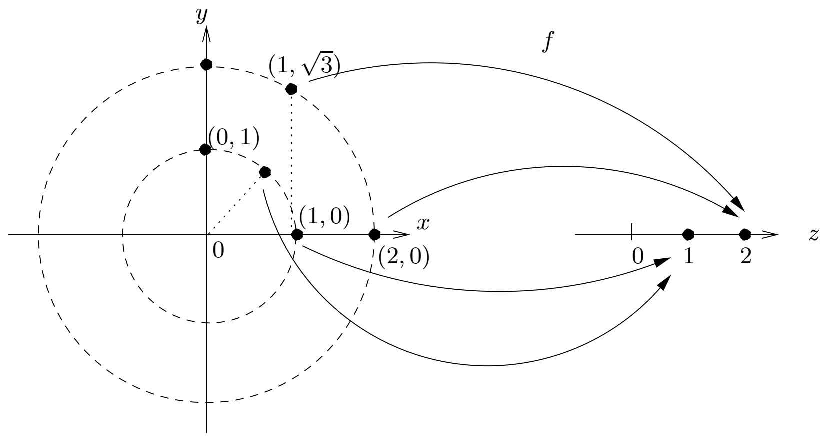
Exemplo 1

$f(x, y) = x + y$, com $D = \mathbb{R}^2$.



Exemplo 2

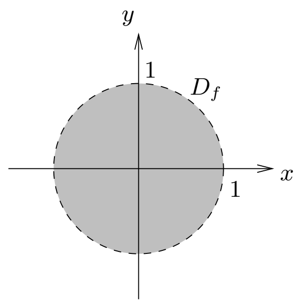
$f(x, y) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (norma de (x, y)), com $D = \mathbb{R}^2$.



Exemplo 3

$f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$ com

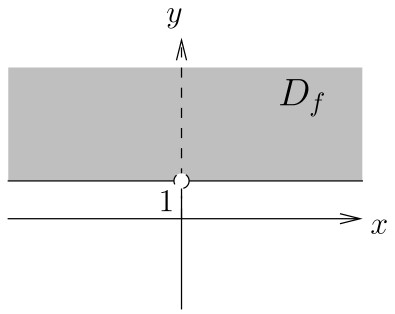
$$\mathrm{D}_f = \{(x, y) : 1 - x^2 - y^2 > 0\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}.$$



Exemplo 4

$f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y-1}}{x}$ com

$$\mathrm{D}_f = \{(x, y) : x \neq 0, y - 1 \geq 0\} = \{(x, y) : x \neq 0, y \geq 1\}.$$



Exemplo 5

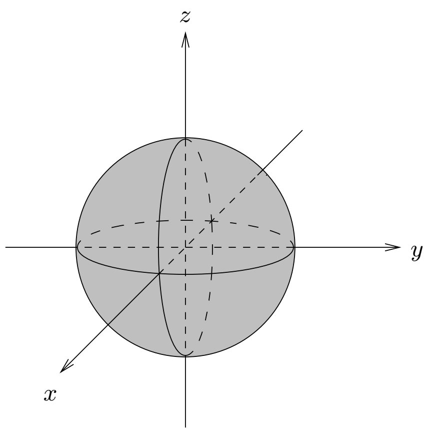
$f(x, y, z) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}$ com

$$\mathrm{D}_f = \{(x, y, z) : 1 - (x^2 + y^2 + z^2) \geq 0\} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

que corresponde à região do espaço delimitada pela esfera de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

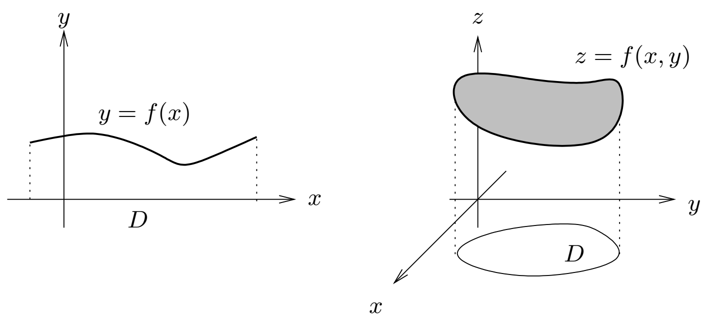
incluindo a própria superfície da esfera.



Definição 1 Consideremos uma função $f : \mathrm{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Chama-se *gráfico de* f ao subconjunto de $\mathbb{R}^3$,

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in \mathrm{D}_f, \ z = f(x, y)\}.$$

É importante constatar que, em geral, os gráficos de funções reais de uma variável são curvas em $\mathbb{R}^2$ e os gráficos de funções reais de duas variáveis são superfícies em $\mathbb{R}^3$.



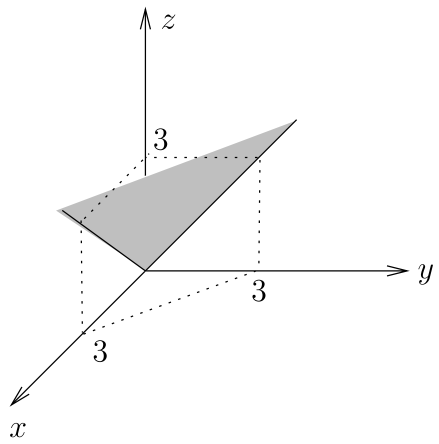
Vejamos alguns exemplos de funções e respectivos gráficos.

Exemplo 6

Consideremos a função $f(x, y) = x + y$ cujo domínio é $\mathbb{R}^2$. O gráfico de f é

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x + y\}.$$

Reconhece-se imediatamente que o gráfico de f é o plano de $\mathbb{R}^3$ de equação $z = x + y$ representado na figura abaixo.

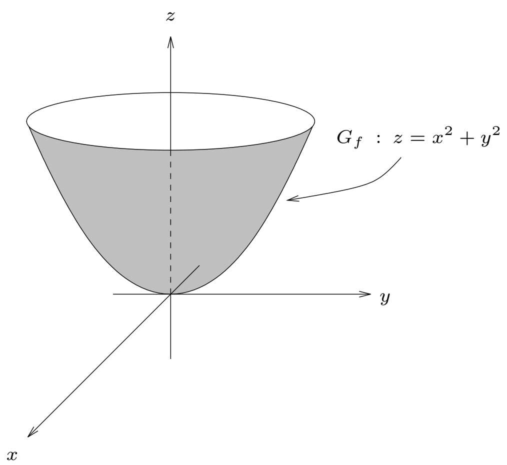


Exemplo 7

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$. O gráfico de f é o subconjunto de $\mathbb{R}^3$,

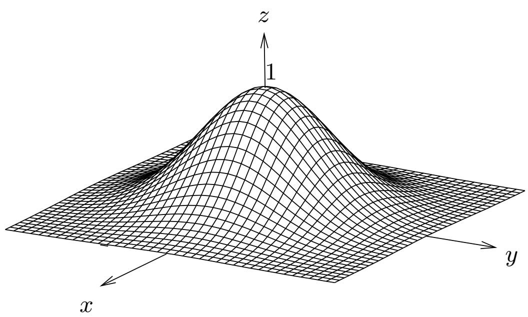
$$G_f = \{(x, y, z) \,:\, (x, y) \in \mathrm{D}_f = \mathbb{R}^2, \quad z = f(x, y) = x^2 + y^2\},$$

que mais à frente veremos ser o paraboloide elíptico representado na figura.



Exemplo 8

O gráfico da função $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ seria difícil de representar sem o auxílio de *software* computacional.



Uma vez que na grande maioria dos casos não é fácil representar o gráfico de uma função, recorre-se muitas vezes aos conjuntos de nível da função.

Definição 2 Consideremos uma função $f : \mathrm{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e uma constante real k. Chama-se *conjunto de nível* k ao subconjunto de $\mathbb{R}^2$,

$$C_k = \{(x, y) \in D_f \ : \ f(x, y) = k\}.$$

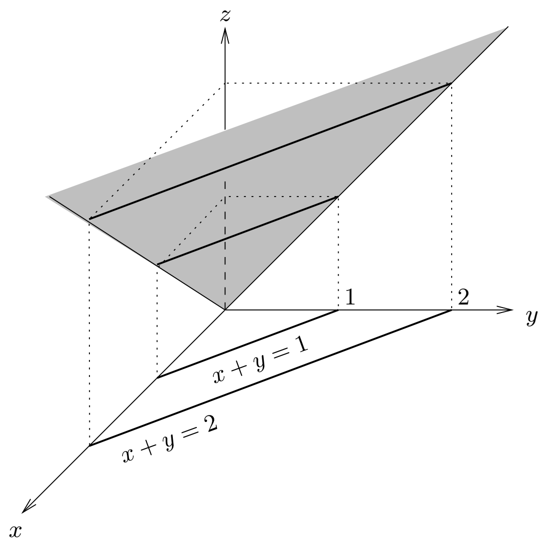
Para funções de duas variáveis os conjuntos de nível chamam-se *curvas de nível*. Para funções de três variáveis os conjuntos de nível, que se definem analogamente, designam-se por *superfícies de nível*.

Os conjuntos de nível podem ser vazios ou reduzirem-se a um ponto.

Vejamos alguns exemplos de identificação dos conjuntos de nível da função, onde se evidencia a sua relação com o gráfico da função.

Exemplo 9

Consideremos de novo a função $f(x, y) = x + y$ cujo domínio é $\mathbb{R}^2$. É fácil de verificar que as curvas de nível $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = k\}$ são rectas paralelas de $\mathbb{R}^2$.



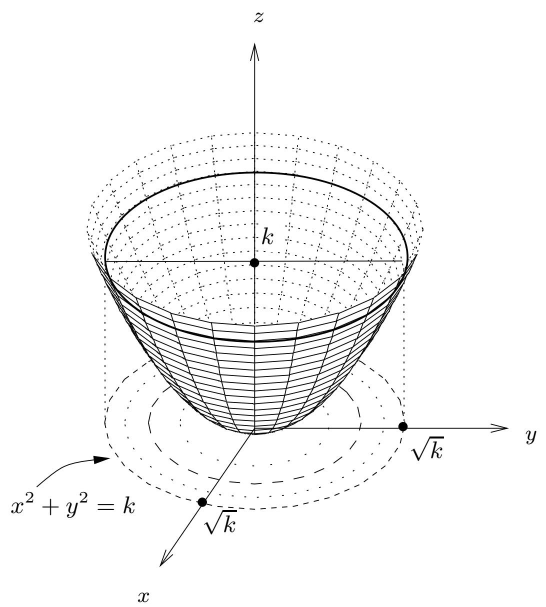
Exemplo 10

As curvas de nível da função $f(x,y) = x^2+y^2$, são as circunferências centradas na origem, de raio $\sqrt{k}$, $k \geq 0$, definidas por

$$x^2 + y^2 \; = \; k$$

Tem-se portanto

$$C_k = \{(x,y) \; : \; x^2+y^2 = k\} = \begin{cases} \emptyset, & k < 0 \\ \{(0,0)\}, & k = 0 \\ \text{circunf. raio } \sqrt{k}, & k > 0 \end{cases}$$

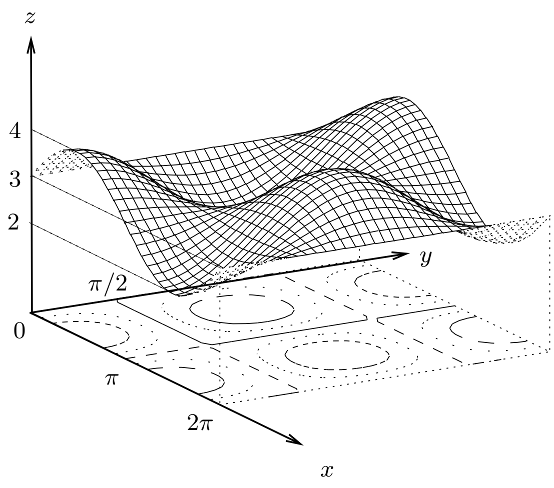


Exemplo 11

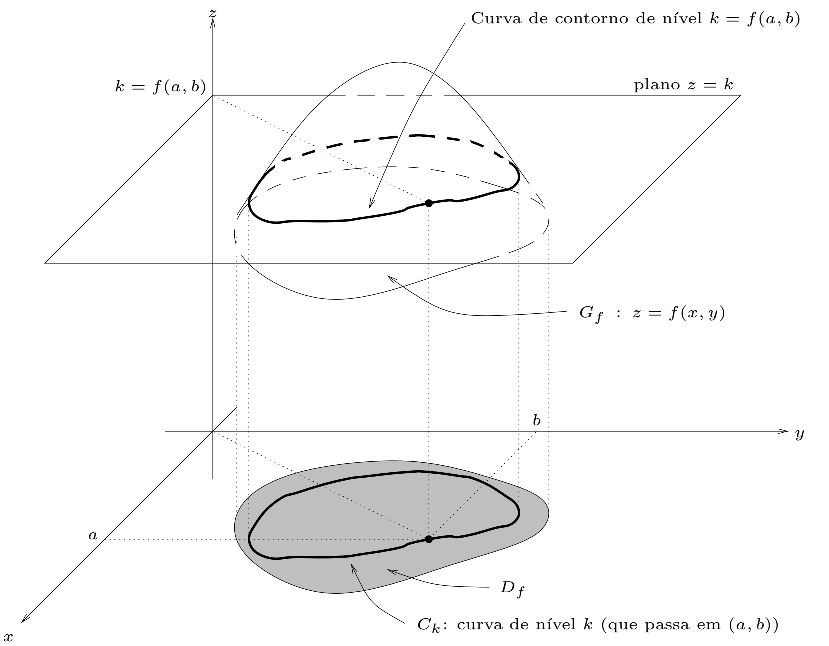
Consideremos

$$z = f(x, y) = \sin(x)\, \cos(y) + 3,$$

com domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 2\pi\}$. O gráfico desta função encontra-se representado na seguinte figura, assim como várias das suas curvas de nível.



A curva de nível k é a projecção no plano $x0y$ da intersecção do gráfico de f com o plano $z = k$.



Exemplo 12

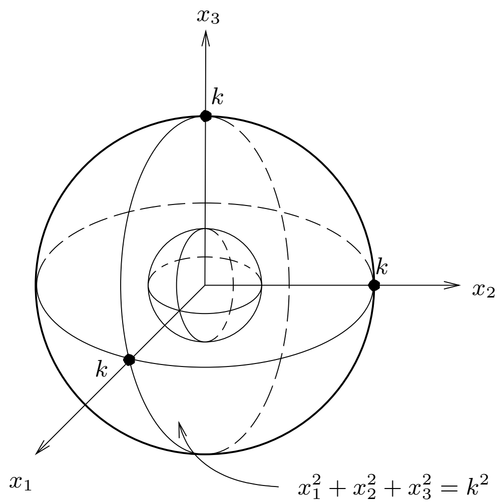
Consideremos por último a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

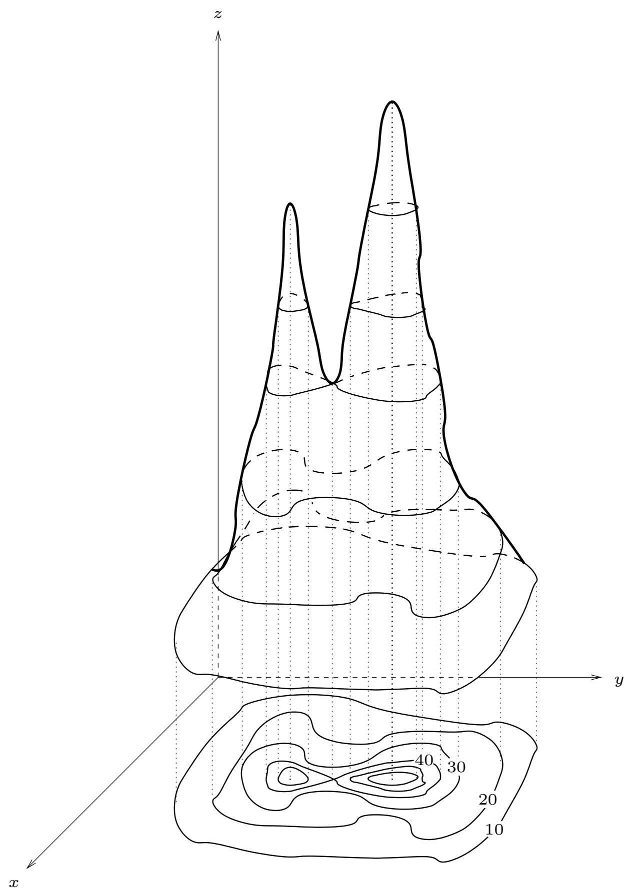
As superfícies de nível $k \geq 0$ são as superfícies

$$C_k = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = k\right\}, \qquad k \geq 0,$$

que se reconhece serem esferas de raio k, centradas na origem.



A partir das curvas de nível de uma função é possível ter uma ideia de qual o respectivo gráfico, "levantando" as curvas de nível.



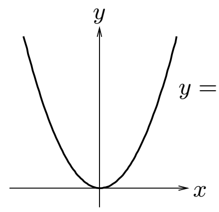
Importa nesta altura reter os diferentes modos como curvas e superfícies podem aparecer definidas analiticamente.

Curvas em $\mathbb{R}^2$ - Conjuntos de pontos (x, y) que verificam uma equação da forma:

1. $\boxed{y = f(x)}$

   Neste caso, a curva é o gráfico de uma função de uma variável.

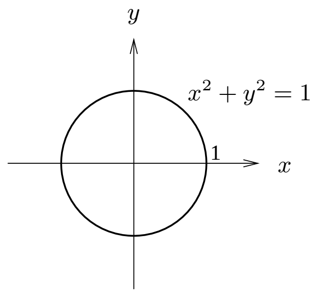
   Ex: $y = f(x) = x^2$



2. $\boxed{f(x, y) = k}$

   Neste caso, temos uma curva de nível de uma função de duas variáveis.

   Ex: $x^2 + y^2 = 1$ é a curva de nível 1 de $f(x, y) = x^2 + y^2$.



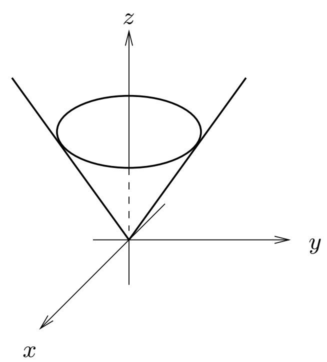
Note que a representação $f(x, y) = k$ é mais geral do que $y = f(x)$. De facto, $y = x^2$ pode ser encarada como a curva de nível zero de $f(x, y) = y - x^2$ enquanto que $x^2 + y^2 = 1$ não pode ser vista como o gráfico de uma função de uma variável.

Superfícies de $\mathbb{R}^3$ - Conjuntos de pontos (x, y, z) que verificam uma equação do tipo:

1. $\boxed{z = f(x, y)}$

   Neste caso, a superfície é o gráfico de uma função de duas variáveis.

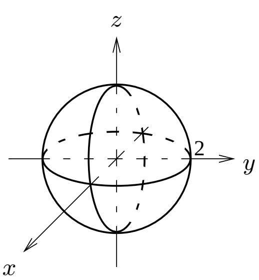
   Ex: $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$



2. $\boxed{f(x, y, z) = k}$

   Neste caso, temos uma superfície de nível de uma função de três variáveis.

   Ex: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ é a superfície de nível 4 de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.



Entre os gráficos de funções definidas em $\mathbb{R}^2$ (que correspondem a superfícies de $\mathbb{R}^3$) e superfícies de nível de funções definidas em $\mathbb{R}^3$ surgiram-nos algumas superfícies quádricas.

Superfícies quádricas

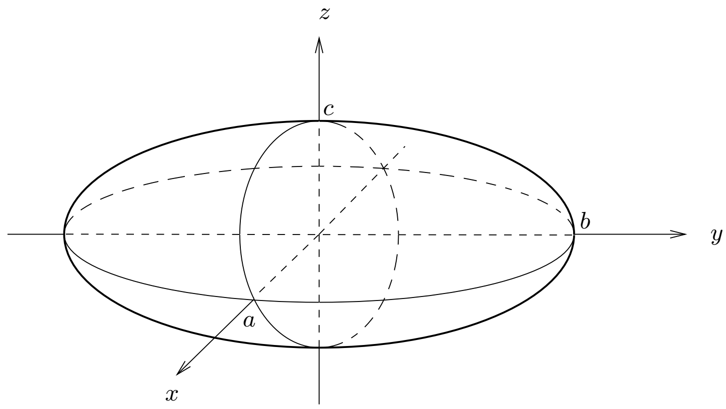
Definição 3 Uma superfície quádrica é uma superfície definida por uma equação polinomial do 2^o grau em três variáveis,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

em que $A, B, \ldots, J$ são constantes reais.

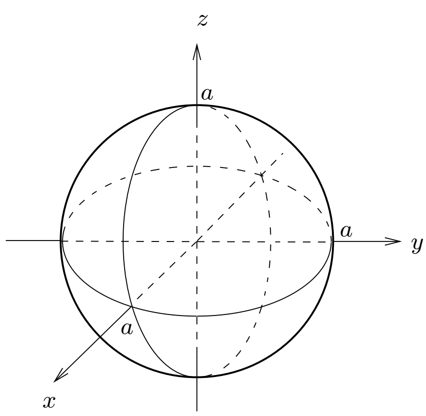
Lista de superfícies quádricas (definidas por equações na forma reduzida):

1. **Elipsoide** $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$.

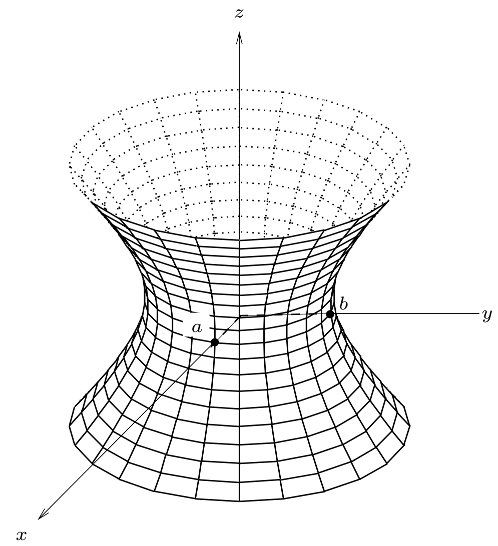


Caso particular:

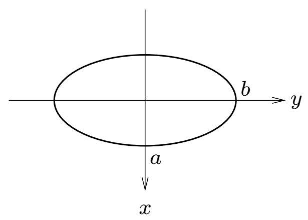
Se $a = b = c$ obtém-se a esfera centrada na origem de raio a definida pela equação $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = a^2}$.



2. **Hiperboloide (elíptico) de uma folha** $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1}$.



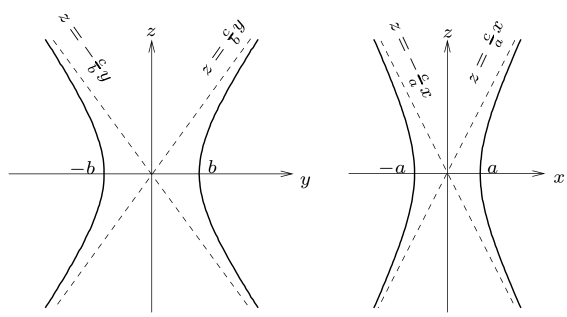
A intersecção do hiperboloide elíptico de uma folha com o plano $z=0$, isto é, o traço em $x0y$, é a elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



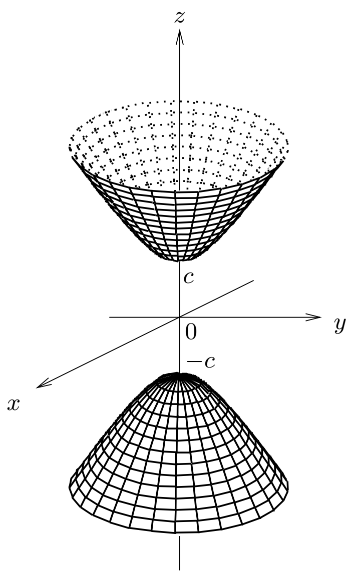
A intersecção do hiperboloide com os planos $x=0$ e $y=0$, isto é, os traços em $y0z$ e em $x0z$, são, respectivamente, as hipérboles

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

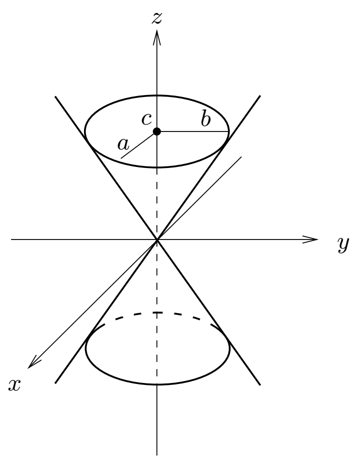
representadas na figura abaixo.



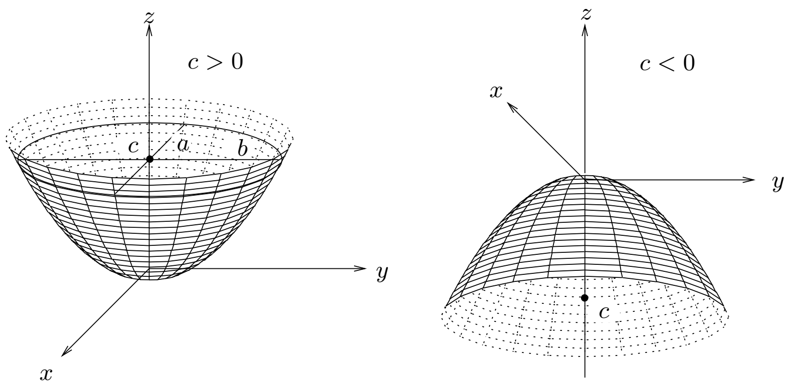
3. **Hiperboloide de duas folhas** $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1}$.



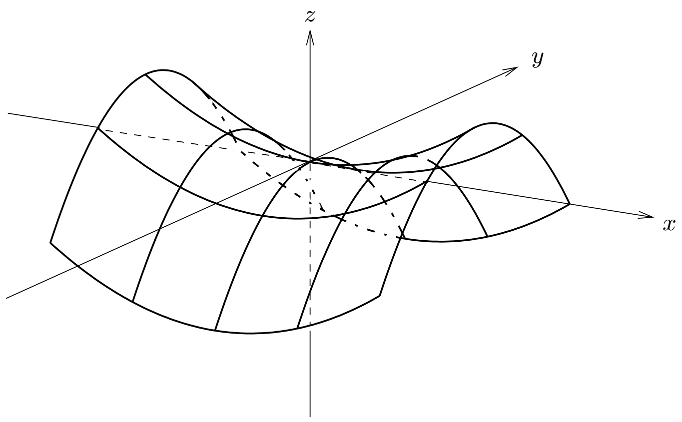
4. **Cone** $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}}$.



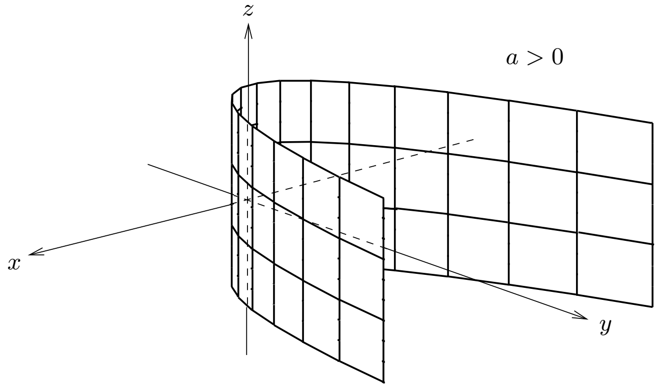
5. **Paraboloide elíptico** $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}}$.



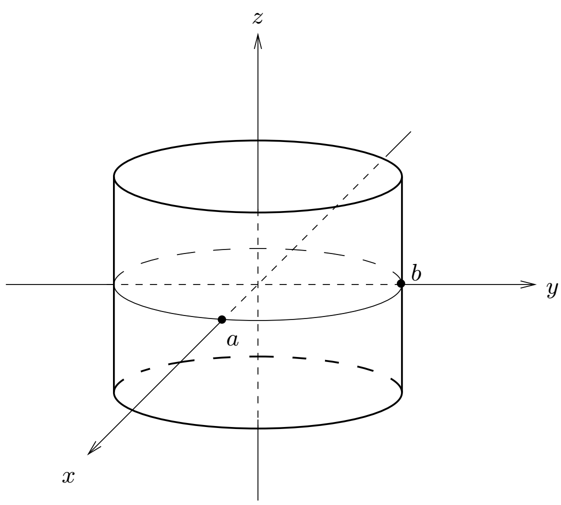
6. **Paraboloide hiperbólico** $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}}$.



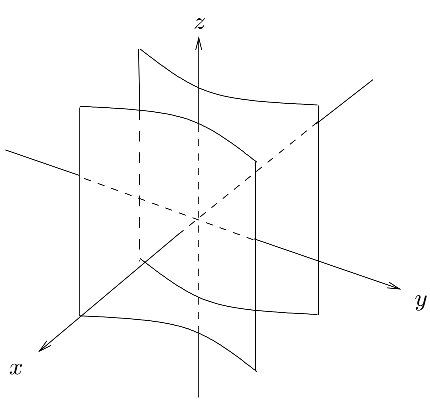
7. **Cilindro parabólico** $\boxed{ax^2-by=0}$.



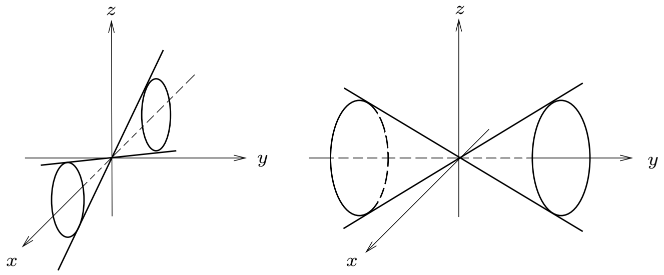
8. **Cilindro elíptico** $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$.



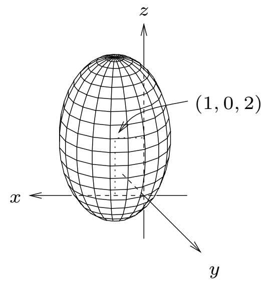
9. **Cilindro hiperbólico** $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$.



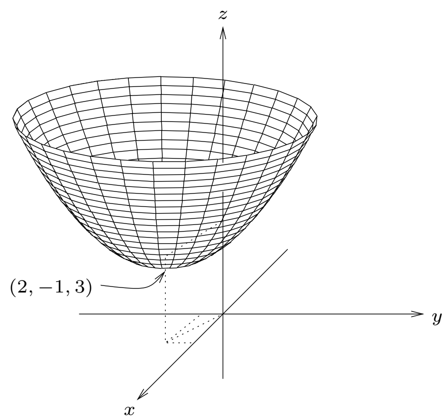
Se permutarmos nas equações anteriores as variáveis x, y, z entre si, vamos alterar a orientação dessa superfície relativamente aos eixos coordenados.
Por exemplo, as equações $\dfrac{z^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = x^2$ e $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = y^2$ definem os cones representados na seguinte figura.



Se nas equações anteriores substituirmos x, y e z respectivamente por $x - x_0$, $y - y_0$ e $z - z_0$, obtemos equações não reduzidas de quádricas que são uma translação das anteriores (definida pelo vector (x_0, y_0, z_0)).
Por exemplo, $\dfrac{(x-1)^2}{4} + y^2 + \dfrac{(z-2)^2}{9} = 1$, é o elipsoide de centro $(1, 0, 2)$ e semi-eixos 2,1 e 3, representado na figura



e $(x-2)^2 + (y+1)^2 = z - 3$, é o paraboloide de vértice $(2, -1, 3)$, representado na seguinte figura.



Continuidade

A noção de continuidade conhecida para funções de uma variável generaliza-se de modo natural para funções com duas (ou mais) variáveis. Intuitivamente, uma função de duas variáveis é contínua se pequenas variações nas variáveis independentes originam uma pequena variação no valor da função, o que se traduz no facto que os gráficos de funções contínuas são superfícies sem "buracos".
Importa registar que qualquer função construída a partir de funções contínuas através de somas, produtos, divisões e composições, é ainda contínua no seu domínio. É o caso das

- funções polinomiais;

  Por exemplo $f(x,y) = x^2y + 2xy$ é uma função polinomial, contínua em $\mathbb{R}^2$.

- funções racionais;

  A função racional $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ é contínua no seu domínio, isto é em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

- funções compostas de funções polinomiais, funções racionais, funções potência, função exponencial e logarítmica e funções trignométricas;

  As funções $f(x,y) = \ln(x+y)$ e $g(x,y) = \operatorname{arctg}(x+e^y)$ são contínuas, respectivamente em $\{(x,y) : x+y > 0\}$ e em $\mathbb{R}^2$.

Tal como até aqui trabalharemos apenas com funções construídas deste modo, ou seja, com funções contínuas.

Exercícios 1

1. Determine o domínio das seguintes funções e represente-o geometricamente:

   (a) $f(x,y) = \frac{x}{y}$.

   (b) $f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) - \sqrt{1-x}$.

   (c) $f(x,y) = \frac{\ln(3-x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

   (d) $f(x,y) = \frac{x}{y-1}$.

   (e) $f(x,y) = \sqrt{x(y-x^2)}$.

   (f) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}+1}$.

2. Identifique os conjuntos de nível e esboce o gráfico das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = 3$.

   (b) $f(x,y) = x$

   (c) $f(x,y) = x^2$.

   (d) $f(x,y) = |x|$.

   (e) $f(x,y) = \|(x,y)\|$

   (f) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

   (g) $f(x,y) = e^{-x^2-2y^2}$.

3. Relativamente a cada uma das funções indicadas nas alíneas (f) e (g) do exercício anterior:

   (a) Defina a curva de nível que passa no ponto $(1,1)$.

   (b) Diga, justificando, se o ponto $(1,1,1)$ pertence ao respectivo gráfico.

   (c) Determine o respectivo contradomínio.

4. Defina analitica e geometricamente as curvas de nível para as seguintes funções, indicando em cada caso o respectivo domínio:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x}{x+y}}$.

   (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$.

5. Identifique analitica e geometricamente os conjuntos de nível das seguintes funções:

   (a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

   (b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$.

   (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$.

6. Determine uma função para a qual:

   (a) $y = 3x + 4$ é uma curva de nível.

   (b) $x^2 - y = 1$ é uma curva de nível.

   (c) $x^2 - y = 1$ é uma superfície de nível.

   (d) $x^2 + y^2 = 4$ é uma superfície de nível.

7. Identifique as quádricas:

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 12 = 0$.

   (b) $z = \sqrt{25 - (x-2)^2 - (y-3)^2}$.

   (c) $z = 3 + \sqrt{25 - (x-2)^2 - (y-3)^2}$.

   (d) $z = x^2 + 4y^2 + 7$.

   (e) $4x = y^2 + z^2$.

   (f) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$.

   (g) $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$.

(h) $9x^2 - 16y^2 + 4z^2 = 64$.

(i) $4x = y^2 - 2z^2$.

(j) $4x^2 - y^2 + 16z^2 = 0$.

(k) $4x^2 - y^2 - 16z^2 = 0$.

(l) $4x^2 + y^2 = 4$.

(m) $x^2 - y^2 = 25$.

(n) $x^2 + y^2 = 25$.

(o) $y^2 - 4x = 0$.

(p) $xy = 6$.

8. Escreva a equação de

(a) Cone cujo vértice é a origem e cuja intersecção com o plano $z = 1$ é $x^2+y^2 = 4$.

(b) Esfera de centro $(-2, 1, 0)$ e raio 2.

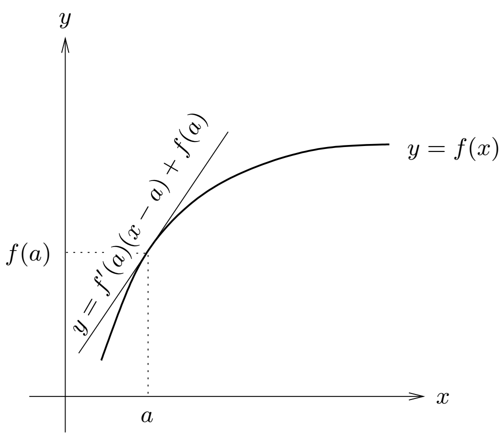
(c) Elipsoide de centro $(0, 0, 1)$ e semi-eixos, 2, -1, 4.

1.2 Derivadas parciais. Plano tangente.

É conhecida para funções de uma variável real, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a definição de derivada[2] num ponto $a \in I$,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

A existência de $f'(a)$ equivale à existência da recta (não vertical) tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$, sendo $f'(a)$ o valor do seu declive[3].



Não menos importante que a interpretação geométrica da derivada é reconhecer que o valor da derivada de f em a, $f'(a)$, pode ser interpretado como a *taxa de variação de f em a*

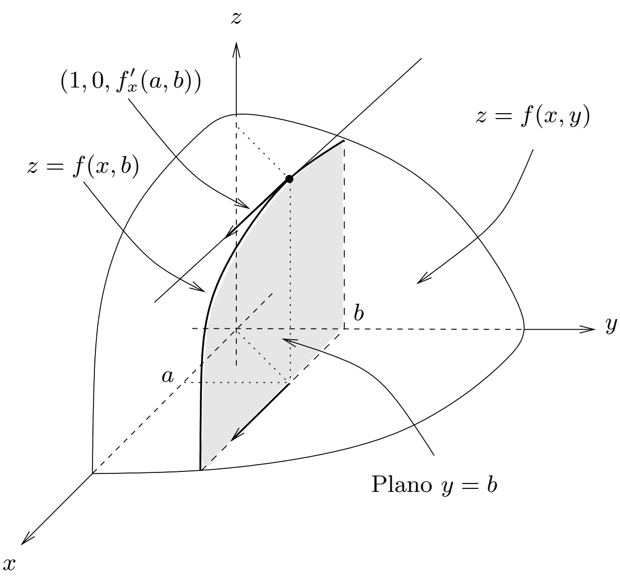
Para funções de mais do que uma variável começamos por estudar como é que a função varia relativamente a cada uma das variáveis, isto é, qual a variação que a função sofre se alterarmos uma das variáveis mantendo as outras constantes. Isto leva-nos à definição de derivada parcial.

[2] A derivada de uma função $y = f(x)$ denota-se por y' ou $f'(x)$ ou $\frac{df}{dx}$ ou ainda por $\frac{dy}{dx}$.

[3] Note que o vector director da recta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ é $\vec{r} = (1, f'(a))$ e consequentemente a respectiva equação vectorial é

$$(x, y) = (a, f(a)) + \lambda(1, f'(a)).$$

Consideremos $z = f(x, y)$. Se fixarmos, por exemplo, a variável $y = b$ (b constante) obtemos uma função $z = f(x, b)$ de apenas uma variável x. Geometricamente isto corresponde a seccionar a superfície $z = f(x, y)$ pelo plano $y = b$.



A derivada de $z = f(x, b)$ em $x = a$ é

$$\frac{df(x,b)}{dx}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h},$$

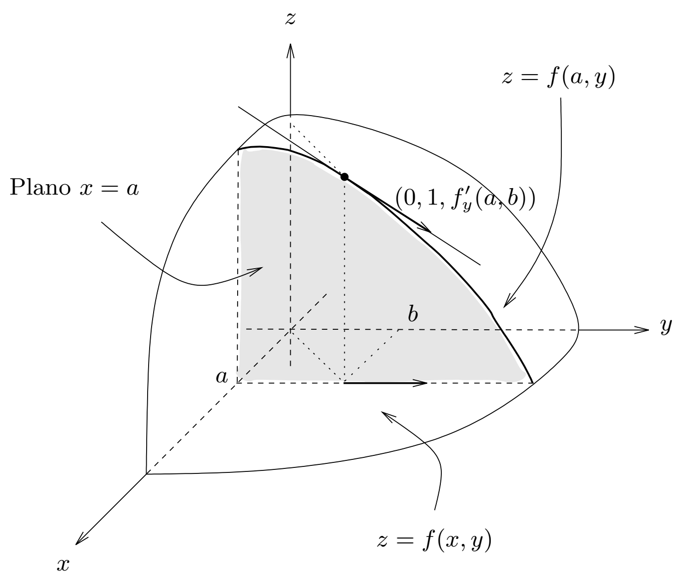
que é precisamente a *derivada parcial de f em ordem a x no ponto* (a, b), e que se denota por $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ ou por $f'_x(a, b)$, isto é,

$$f'_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}.$$

O valor de $f'_x(a, b)$ é a taxa de variação de f no ponto (a, b) na direcção do eixo dos xx.
O valor de $f'_y(a, b)$ é o declive da recta do plano $y = b$, tangente à curva $z = f(x, b)$ em $(a, b, f(a, b))$. Em $\mathbb{R}^3$ essa recta tem vector director $(1, 0, f'_x(a, b))$.

Analogamente se define *derivada parcial em ordem à variável y no ponto* (a, b) que se denota por $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ ou por $f'_y(a, b)$. Se fixarmos $x = a$ obtemos uma função $z = f(a, y)$ de apenas uma variável y, cuja derivada em $y = b$ é precisamente

$$f'_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}.$$



O valor de $f'_y(a, b)$ é a taxa de variação de f no ponto (a, b) na direcção do eixo dos yy. O valor de $f'_x(a, b)$ é o declive da recta do plano $x = a$, tangente à curva $z = f(a, y)$ em $(a, b, f(a, b))$. Em $\mathbb{R}^3$ essa recta tem vector director $(0, 1, f'_y(a, b))$.

Na maior parte dos casos, as derivadas parciais calculam-se recorrendo às regras de derivação conhecidas para funções de uma variável, considerando a(s) outra(s) variável (variáveis) constante(s).

Exemplo 13

Pretende-se calcular $f'_x(1, 2)$ e $f'_y(1, 2)$, para $f(x, y) = x^2y + y^3$. Fixando $y = 2$ obtém-se a função de uma variável $f(x, 2) = 2x^2 + 8$. Portanto,

$$f'_x(1, 2) = (2x^2 + 8)'|_{x=1} = (4x)|_{x=1} = 4.$$

Analogamente, fixando $x = 1$ tem-se $f(1, y) = y + y^3$ e

$$f'_y(1, 2) = (y + y^3)'|_{y=2} = (1 + 3y^2)|_{y=2} = 13.$$

De uma forma geral, se considerarmos uma das variáveis constante e derivarmos em ordem à outra obtemos as funções

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= (x^2y + y^3)'_x = y(x^2)'_x + (y^3)'_x = 2xy + 0 = 2xy, \\ f'_y(x, y) &= (x^2y + y^3)'_y = x^2(y)'_y + (y^3)'_y = x^2 \cdot 1 + 3y^2 = x^2 + 3y^2. \end{aligned}$$

Os valores $f'_x(1, 2)$ e $f'_y(1, 2)$ obtêm-se substituindo x por 1 e y por 2.

Exemplo 14

Se $f(x, y) = e^{xy} + \dfrac{x}{y}$ as funções derivadas parciais de 1ª ordem são

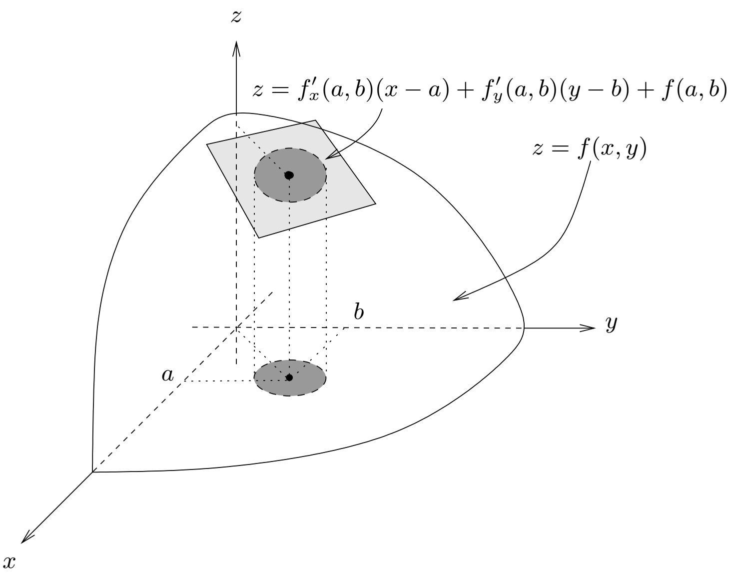
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= f'_x(x, y) = y\, e^{xy} + \frac{1}{y}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= f'_y(x, y) = x\, e^{xy} - \frac{x}{y^2}. \end{aligned}$$

Obviamente f'_x e f'_y só se definem em pontos do domínio de f, isto é, os domínios de f'_x e f'_y estão contidos no domínio de f.

Plano tangente

O análogo, para funções de duas variáveis, da recta tangente ao gráfico de $y = f(x)$, é o *plano tangente ao gráfico de* $z = f(x, y)$.

Geometricamente o plano tangente a uma superfície num ponto é o plano que "melhor" aproxima a superfície perto desse ponto.



Enquanto que para uma função f de uma variável a existência da recta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$ é equivalente à existência de $f'(a)$, não basta, para uma função f de duas variáveis, a existência das derivadas parciais $f'_x(a,b)$ e $f'_y(a,b)$ para garantir a existência de plano tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a,b))$

Caso exista o plano tangente ao gráfico de $z = f(x,y)$ em $(a, b, f(a,b))$ deverá conter as rectas tangentes às curvas $z = f(x,b)$ e $z = f(a,y)$ no referido ponto, que como vimos atrás têm vectores directores $(1, 0, f'_x(a,b))$ e $(0, 1, f'_y(a,b))$, respectivamente. Assim o referido plano tangente terá vector normal

$$\vec{n} = (1, 0, f'_x(a,b)) \times (0, 1, f'_y(a,b)) = (f'_x(a,b), f'_y(a,b), -1)$$

e uma equação cartesiana do plano tangente ao gráfico de f em $(a, b, f(a,b))$ é

$$(x-a, y-b, z-f(a,b)) \cdot (f'_x(a,b), f'_y(a,b), -1) = 0,$$

isto é,

$$\boxed{z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b).}$$

Prova-se que para funções f que admitem derivadas parciais de 1^a ordem contínuas para todos os pontos perto de um dado ponto (a,b), os respectivos gráficos admitem plano tangente em $(a, b, f(a,b))$.

Exemplo 15

As derivadas parciais da função $z = 9 - x^2 - y^2$, $f'_x = -2x$ e $f'_y = -2y$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Assim podemos escrever a equação do plano tangente ao respectivo gráfico em qualquer ponto $(a, b, f(a, b))$.

Considerando, por exemplo, o ponto $(1, 2, 4)$, tem-se

$$z = f'_x(1,2)(x-1) + f'_y(1,2)(y-2) + f(1,2),$$

isto é,

$$z = -2(x-1) - 4(y-2) + 4.$$

Derivadas parciais de ordem superior

Uma vez que f'_x e f'_y são duas novas funções de duas variáveis podemos derivá-las parcialmente obtendo as derivadas parciais de $2^{\underline{a}}$ ordem para f e assim sucessivamente. A notação utilizada é a seguinte.

Derivadas parciais: de 1^a ordem — de 2^a ordem — de 3^a ordem — etc ...

- f
  - $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$
    - $f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
      - $f'''_{x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$
      - $f'''_{x^2y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$
    - $f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
      - $f'''_{xyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$
      - $f'''_{xy^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$
  - $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$
    - $f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
      - $f'''_{yx^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$
      - $f'''_{yxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$
    - $f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
      - $f'''_{y^2x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$
      - $f'''_{y^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$

Exemplo 16

Vamos determinar as derivadas parciais de 2ª ordem para $f(x,y) = x\ln y$. Comecemos por notar que $D_f = \{(x,y) : y > 0\}$. Tem-se para todo $(x,y) \in D_f$,

$$f = x\log y \quad \begin{cases} f'_x = \log\ y & \begin{cases} f''_{x^2} = 0 \\ f''_{xy} = \frac{1}{y} \end{cases} \\ f'_y = \frac{x}{y} & \begin{cases} f''_{yx} = \frac{1}{y} \\ f''_{y^2} = -\frac{x}{y^2} \end{cases} \end{cases}$$

EXEMPLO 17

Vamos determinar as derivadas parciais de 2ª ordem para $f(x,y,z) = x^2y^2\cos z$. Comecemos por notar que $D_f = \mathbb{R}^3$. Tem-se para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$f = x^2y^2\cos z \quad \begin{cases} f'_x = 2xy^2\cos z & \begin{cases} f''_{x^2} = 2y^2\cos z \\ f''_{xy} = 4xy\cos z \\ f''_{xz} = -2xy^2\sin z \end{cases} \\ f'_y = 2x^2y\cos z & \begin{cases} f''_{yx} = 4xy\cos z \\ f''_{y^2} = 2x^2\cos z \\ f''_{yz} = -2x^2y\sin z \end{cases} \\ f'_z = -x^2y^2\sin z & \begin{cases} f''_{zx} = -2xy^2\sin z \\ f''_{zy} = -2x^2y\sin z \\ f''_{z^2} = -x^2y^2\cos z \end{cases} \end{cases}$$

Podemos constatar nos exemplos anteriores que se tem para as $2^{\underline{as}}$ derivadas parciais "mistas",

$$f''_{xy} = f''_{yx}, \qquad f''_{xz} = f''_{zx}, \qquad f''_{yz} = f''_{zy},$$

isto é, que a ordem pela qual se calculam as derivadas parciais de ordem superior não é relevante. Embora esta propriedade não se verifique para funções arbitrárias, é válida para as funções com derivadas parciais de 2^a ordem contínuas.

Matriz Jacobiana e gradiente. Matriz Hessiana

Definição 4 Chamamos *matriz Jacobiana de f em (a, b)* à matriz linha das derivadas parciais de f em (a, b), ou seja,

$$J_f(a, b) = \begin{bmatrix} f'_x(a, b) & f'_y(a, b) \end{bmatrix}_{1\times 2}.$$

Chamamos *gradiente de f em (a, b)* e representa-se por $\text{grad}\, f(a, b)$ ou $\nabla f(a, b)$, ao vector das suas derivadas parciais de f em (a, b),

$$\text{grad}\, f(a, b) = \begin{bmatrix} f'_x(a, b) \\ f'_y(a, b) \end{bmatrix} = \big(f'_x(a, b), f'_y(a, b)\big).$$

Note que $\text{grad}\, f(a, b)$ coresponde à matriz transposta da matriz Jacobiana $J_f(a, b)$, *i.e.*,

$$\text{grad}\, f(a, b) = J_f(a, b)^T.$$

EXEMPLO 18

Consideremos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2\, e^{3\,y}$. Tem-se

$$\begin{aligned} J_f(x, y) &= \begin{bmatrix} 2\,x\,e^{3\,y} & 3\,x^2\,e^{3\,y} \end{bmatrix}, \\ \text{grad}\, f(x, y) &= \big(2\,x\,e^{3\,y},\ 3\,x^2\,e^{3\,y}\big) = \begin{bmatrix} 2\,x\,e^{3\,y} \\ 3\,x^2\,e^{3\,y} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 19

Seja $f(x, y, z) = -x\,y^2$. Tem-se

$$\begin{aligned} J_f(x,y,z) &= \begin{bmatrix} -y^2 & -\,2\,x\,y & 0 \end{bmatrix}, \\ \operatorname{grad} f(x,y,z) &= (-y^2,\ -2\,x\,y,\ 0) = \begin{bmatrix} -y^2 \\ -2\,x\,y \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definição 5 Chamamos *matriz Hessiana de f em* (a, b) e denota-se por $H_f(a, b)$ à matriz das derivadas parciais de $2^{\underline{a}}$ ordem de f em (a, b),

$$\begin{bmatrix} f''_{x^2}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{yx}(a,b) & f''_{y^2}(a,b) \end{bmatrix}.$$

Exemplo 20

Consideremos a função $f(x, y) = x \ln y$ do exemplo 16. A matriz Hessiana de f em $(3, 4)$ é,

$$H_f(3,4) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{bmatrix}_{(3,4)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{16} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 21

Consideremos a função $f(x, y, z) = x^2y^2 \cos z$ do exemplo 17. A matriz Hessiana de f é,

$$H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^2\cos z & 4xy\cos z & -2xy^2\sin z \\ 4xy\cos z & 2x^2\cos z & -2x^2y\sin z \\ -2xy^2\sin z & -2x^2y\sin z & -x^2y^2\cos z \end{bmatrix}$$

Exercícios 2

1. Determine as derivadas parciais de $1^{\underline{a}}$ ordem das seguintes funções:

   (a) $f(x, y) = x^3\,y - 2x\,y^2 + x^4$.

(b) $f(x,y) = 2x\sqrt{x^2+y^2+1}$.

(c) $f(x,y) = x^3 + \cos(x+3y)$.

(d) $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

(e) $f(x,y) = e^{-y^2}\cos(x^2+y^2)$.

(f) $f(x,y) = \ln(\frac{x}{y^2})$.

(g) $f(x,y,z) = (2x-y+z)e^{x-y}$.

2. Considere a função $f(x,y) = \frac{x}{y}$.

   Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,0) = x^2$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $f(1,y) = y + e^{-y}$ para todo o $y \in \mathbb{R}$.

   Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$.

4. Indique uma equação do plano tangente ao gráfico de:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2+1}$ em $(1,3,f(1,3))$.

   (b) $f(x,y) = x^3 - xy + e^y$ em $(-1,0,0)$.

   (c) $f(x,y) = \sin(3x + ye^x)$ em $(0,0,f(0,0))$.

5. Calcule as derivadas parciais até à 2ª ordem e indique as matrizes Jacobiana e Hessiana de:

   (a) $f(x,y) = x$.

   (b) $f(x,y) = x^2 + y\ln x$.

   (c) $f(x,y,z) = \ln(x+y^2+z^2)$.

   (d) $f(x,y) = \|(x,y)\|$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

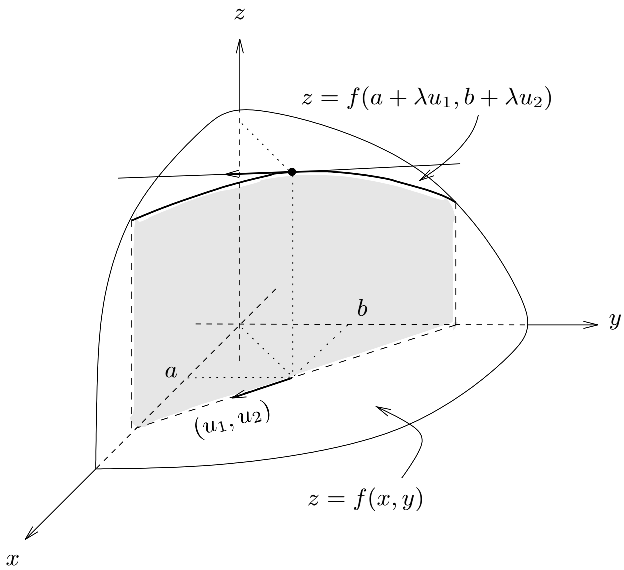
   (e) $f(x,y) = x\,\|(x,y)\|$ em em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1.3 Derivadas direccionais e gradiente

Vamos agora generalizar a noção de derivada parcial definindo a *derivada direccional* de f em (a, b) segundo o vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\|\vec{u}\| = 1$, como

$$f'_{\vec{u}}(a,b) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f((a,b) + \lambda(u_1,u_2)) - f(a,b)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a + \lambda u_1, b + \lambda u_2) - f(a,b)}{\lambda}.$$

$f'_{\vec{u}}(a,b)$ representa a taxa de variação de f em (a,b) na direcção e sentido do vector $\vec{u}$.



Se não exigirmos que $\|\vec{u}\| = 1$, a derivada direccional não fica definida de maneira única (vai depender também da norma de $\vec{u}$) e não podemos interpretá-la como a taxa de variação da função na direcção do vector $\vec{u}$.

As derivadas parciais são casos particulares das derivadas direccionais:

$$\begin{aligned} f'_x(a,b) &= f'_{(1,0)}(a,b) \\ f'_y(a,b) &= f'_{(0,1)}(a,b). \end{aligned}$$

No cálculo da derivada direccional de funções com derivadas parciais contínuas o gradiente é de grande utilidade uma vez que

$$f'_{\vec{u}}(a,b) = \operatorname{grad} f(a,b) \cdot \vec{u} = f'_x(a,b)\, u_1 + f'_y(a,b)\, u_2, \qquad \forall \vec{u} = (u_1,u_2) \ : \ \|\vec{u}\| = 1.$$

Exemplo 22

Se $f(x,y) = x^2 + y$ e $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

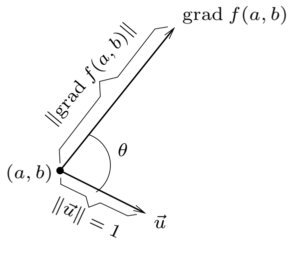
$$\begin{aligned} f'_{\vec{u}}(1,2) &= \operatorname{grad} f(1,2) \cdot \vec{u} \\ &= (2x,1)_{(1,2)} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 2\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Com o conhecimento das derivadas direccionais ficamos a saber a taxa de variação da função na direcção e sentido do vector em que são calculadas. É natural questionar qual o vector segundo o qual *a taxa de variação é máxima, mínima e nula.*

As respostas a estas questões são facilmente dadas uma vez que

$$f'_{\vec{u}}(a,b) = \operatorname{grad} f(a,b) \cdot \vec{u} = \|\operatorname{grad} f(a,b)\| \; \|\vec{u}\| \; \cos(\theta),$$

onde θ é o ângulo formado pelos vectores $\operatorname{grad} f(a,b)$ e $\vec{u}$.



Supondo que $\operatorname{grad} f(a,b) \neq \vec{0}$ e atendendo ao facto que o co-seno de um ângulo varia entre -1 e 1 e que $\|\vec{u}\| = 1$, obtemos

$$-\|\operatorname{grad} f(a,b)\| \leq f'_{\vec{u}}(a,b) \leq \|\operatorname{grad} f(a,b)\|.$$

Em particular, quando $\cos(\theta) = 1$, isto é, quando $\text{grad} f(a, b)$ e $\vec{u}$ tiverem a mesma direcção e sentido, o valor de $f'_{\vec{u}}(a, b)$ é máximo de valor igual a $\|\text{grad } f(a, b)\|$.

Analogamente, quando $\cos(\theta) = -1$, isto é, quando grad $f(a, b)$ e $\vec{u}$ tiverem a mesma direcção e sentidos opostos, o valor de $f'_{\vec{u}}(a, b)$ é mínimo de valor igual a $-\|\text{grad } f(a, b)\|$.

A taxa de variação $f'_{\vec{u}}(a, b)$ será nula quando grad $f(a, b)$ e $\vec{u}$ forem perpendiculares entre si.

Resumindo:

> Se grad $f(a, b) \neq \vec{0}$,
>
> 1. grad $f(a, b)$ aponta no sentido de crescimento máximo da função em (a, b). O valor máximo da derivada direccional de f em (a, b) é $\|\text{grad } f(a, b)\|$.
> 2. $-\text{grad } f(a, b)$ aponta no sentido de decrescimento máximo da função. O valor mínimo da derivada direccional de f em (a, b) é $-\|\text{grad } f(a, b)\|$.
> 3. O grad $f(a, b)$ é perpendicular à direcção de variação nula de f em (a, b).

Exemplo 23

Consideremos a função $f(x, y) = x^2 + y^2$.

A taxa de variação de f no ponto $(3, 4)$, $f'_{\vec{u}}(3, 4)$, é dada por

$$\begin{aligned} f'_{\vec{u}}(3,4) &= \text{grad } f(3,4) \cdot \vec{u} \qquad \|\vec{u}\| = 1, \\ &= (2x, 2y)_{(3,4)} \cdot (u_1, u_2) = 6u_1 + 8u_2. \end{aligned}$$

A taxa de variação de f em $(3, 4)$ é máxima, de valor $10 = \|\text{grad } f(3, 4)\|$, para

$$\vec{u} = \frac{\text{grad } f(3,4)}{\|\text{grad } f(3,4)\|} = \frac{(6,8)}{\|(6,8)\|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

A taxa de variação de f em $(3,4)$ é mínima, de valor $-10 = -\|\text{grad}\, f(3,4)\|$, para

$$\vec{u} = -\frac{\text{grad}\, f(3,4)}{\|\text{grad}\, f(3,4)\|} = -\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

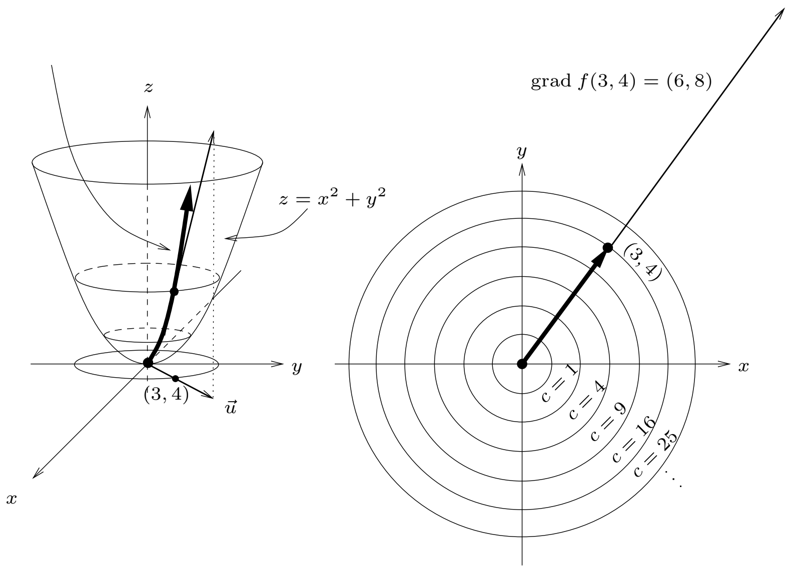
A taxa de variação de f em $(3,4)$ é nula, para $\vec{u} = (u_1, u_2)$ tal que

$$\begin{cases} \|\vec{u}\| = 1, \\ \vec{u} \perp \text{grad}\, f(3,4), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 = 1, \\ 6u_1 + 8u_2 = 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2 + \frac{9}{16}u_1^2 = 1 \\ u_2 = -\frac{3}{4}u_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \pm\frac{4}{5} \\ u_2 = \left(-\frac{3}{4}\right)\left(\pm\frac{4}{5}\right) = \mp\frac{3}{5} \end{cases}$$

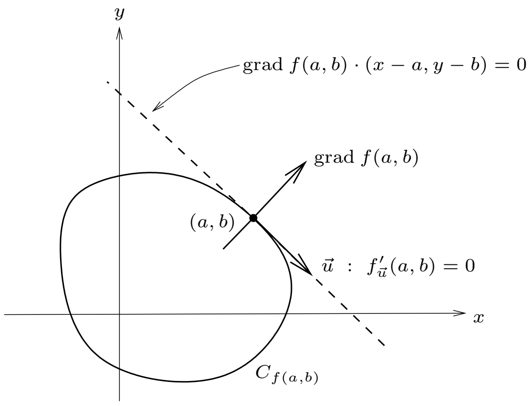
Temos portanto $f'_{\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)} = 0$ e $f'_{\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)} = 0$.



Vejamos agora a relação entre o gradiente de uma função e as respectivas curvas de nível. Nas curvas de nível a variação de uma função f é nula. Assim a direcção para a qual a taxa de variação de f em (a,b) é nula é a direcção do vector director $\vec{u}$ da recta tangente à curva de nível de f que contém (a,b). Como vimos atrás,

$$f'_{\vec{u}}(a,b) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{u} \perp \text{grad}\, f(a,b).$$

Assim:

> O grad $f(a,b)$ é perpendicular em (a,b) à curva de nível de f, $C_{f(a,b)}$, que passa em (a,b)[a]
>
> 
>
>
> [a]Um vector diz-se *perpendicular* a uma curva num ponto P se for perpendicular à recta tangente a essa curva em P

Este facto permite-nos escrever a equação da recta tangente a uma curva definida como curva de nível de uma função $z = f(x,y)$.

Equação da recta tangente à curva de nível $C_{f(a,b)}$ no ponto (a,b):

$$\boxed{\text{grad}\, f(a,b)\cdot(x-a,y-b)=0 \quad\Leftrightarrow\quad f'_x(a,b)(x-a)+f'_y(a,b)(y-b)=0.}$$

Exemplo 24

Pretende-se determinar a recta tangente, no ponto $(1,2)$, à curva

$$x^2y+y^3=10.$$

ou seja, à curva de nível 10 da função

$$f(x,y)=x^2y+y^3.$$

Tem-se

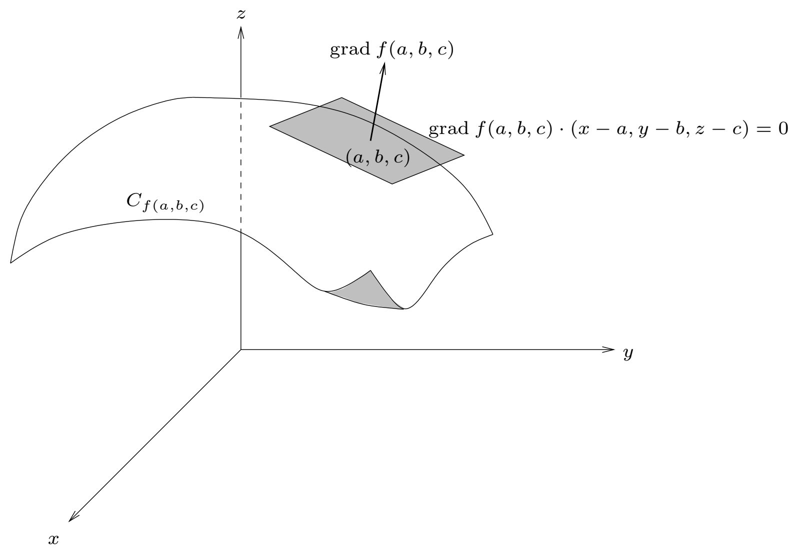
$$\text{grad}\, f(1,2)=(2xy,x^2+3y^2)_{(1,2)}=(4,13).$$

A equação da recta tangente vem:

$$(4,13)\cdot(x-1,y-2)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4x+13y=30.$$

Podemos estabelecer um resultado análogo que relaciona o gradiente de uma função de três variáveis $w=f(x,y,z)$ e as respectivas superfícies de nível:

grad $f(a,b,c)$ é perpendicular em (a,b,c) à superfície de nível de f, $C_{f(a,b,c)}$, que contém o ponto (a,b,c)[a].



[a]Um vector diz-se perpendicular a uma superfície num ponto P se for perpendicular ao plano tangente à superfície em P

Podemos agora escrever a equação do plano tangente a uma superfície definida como superfície de nível de uma função de 3 variáveis.

Equação do plano tangente à superfície de nível $C_{f(a,b,c)}$ no ponto (a,b,c):

$$\boxed{\begin{array}{c} \operatorname{grad} f(a,b,c)\cdot(x-a,y-b,z-c)=0 \\ \Updownarrow \\ f'_x(a,b,c)(x-a)+f'_y(a,b,c)(y-b)+f'_z(a,b,c)(z-c)=0 \end{array}}$$

Exemplo 25

Pretende-se determinar uma equação do plano tangente à esfera de equação $x^2+y^2+z^2=3$ no ponto $(1,1,1)$. A superfície dada é a superfície de nível 3 da função $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Tem-se

$$\operatorname{grad} f(1,1,1)=(2x,2y,2z)_{(1,1,1)}=(2,2,2)$$

e a equação do referido plano tangente é

$$(2,2,2)\cdot(x-1,y-1,z-1)=0$$

isto é,

$$x+y+z=3.$$

Exemplo 26

Pretende-se determinar o plano tangente ao parabolóide de equação $z=x^2+y^2$, no ponto $(1,2,5)$.

Neste caso, a superfície está definida como gráfico da função de 2 variáveis $z=g(x,y)$, onde $g(x,y)=x^2+y^2$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. A equação do plano tangente é

$$\begin{aligned} z=g(1,2)+g'_x(1,2)(x-1)+g'_y(1,2)(y-2) \quad &\Longleftrightarrow \quad z=5+2(x-1)+4(y-2) \\ &\Longleftrightarrow \quad 2x+4y-z=5. \end{aligned}$$

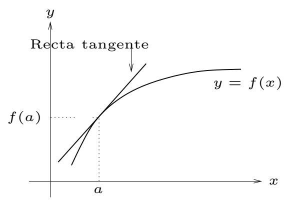
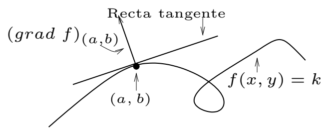
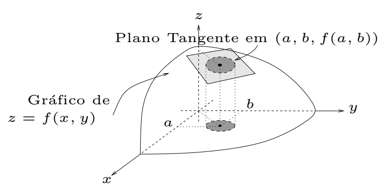
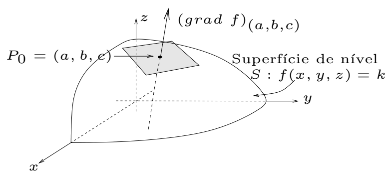
Alternativamente, podemos escrever

$$z = x^2 + y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 - z = 0$$

e considerar a superfície como superfície de nível zero da função de 3 variáveis $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Com esta abordagem, a equação do plano tangente vem:

$$\begin{aligned} \text{grad}\, f(1,2,5) \cdot (x-1, y-2, z-5) = 0 & \Longleftrightarrow & (2x, 2y, -1)_{(1,2,5)} \cdot (x-1, y-2, z-5) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (2, 4, -1) \cdot (x-1, y-2, z-5) \\ & \Longleftrightarrow & 2x + 4y - z = 5. \end{aligned}$$

No quadro que segue sistematizam-se os diferentes métodos para determinar equações de rectas tangentes a curvas e de planos tangentes a superfícies para as várias formas de descrever tais curvas e superfícies.

	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$
C U R V A S	1) **Gráfico de** $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  Recta tangente: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ 2) **Curva de nível de** $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  Recta tangente: $\text{grad}\, f(a, b) \cdot (x - a, y - b) = 0$	
S U P E R F Í C I E S		1) **Gráfico de** $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  Plano tangente: $z - f(a, b) = f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)$ 2) **Superfície de nível de** $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$  Plano tangente: $\text{grad}\, f(a, b, c) \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0$

Exercícios 3

1. Seja $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$.

   (a) Calcule $f'_{\vec{u}}(1, 1)$ para os vectores $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

   (b) Mostre que $f'_{\vec{u}}(0, 0) = 0$ qualquer que seja $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\|\vec{u}\| = 1$.

   (c) Escreva a equação da recta tangente à curva de nível 3 de f em $(0, 1)$.

2. Considere $f(x, y) = x^2y + y^3x$.

   (a) Qual a taxa de variação instantânea de f no ponto $(1, 1)$ na direcção do eixo dos xx?

   (b) Qual a taxa de variação instantânea de f no ponto $(1, 1)$ segundo a direcção do vector $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$?

   (c) Determine a direcção para a qual a derivada direccional de f em $(1, 1)$ é nula.

   (d) Em que direcção se deve deslocar a partir do ponto $(1, 1)$ para obter a maior taxa de variação instantânea de f?

3. As afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas? Justifique convenientemente a resposta.

   (a) $f'_v(a, b)$ é um escalar para $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$.

   (b) Existe uma direcção $v \in \mathbb{R}^2$, com $\|v\| = 1$, tal que $f'_v(a, b) = 0$.

   (c) Existe um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tal que

   $$\|grad\ f(a, b)\| = 4, \qquad f'_{(1,0)}(a, b) = 5.$$

   (d) Existe $v \in \mathbb{R}^2$ com $\|v\| = 1$ tal que $f'_v(a, b) = \|grad\ f(a, b)\|$.

4. Determine a equação da recta tangente às curvas seguintes, nos pontos indicados:

(a) $x^2 + y^2 = 4 \quad , \quad P_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

(b) $x^2 + xy + y^2 = 7 \quad , \quad P_0 = (1, 2)$.

5. Determine uma equação do plano tangente às superfícies seguintes, nos pontos P_0 indicados:

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad , \quad P_0 = (1, 1, 1)$.

   (b) $2z - x^2 = 0 \quad , \quad P_0 = (2, 4, 2)$.

   (c) $z = 3 - 2x^2 - y^2 \quad , \quad P_0 = (1, -1, 0)$.

6. Determine os pontos da superfície $xy + yz + zx - x - z^2 = 0$ onde o plano tangente é paralelo ao plano $X0Y$.

7. Determine um vector unitário perpendicular à superfície

$$2x^3 + xz = 1$$

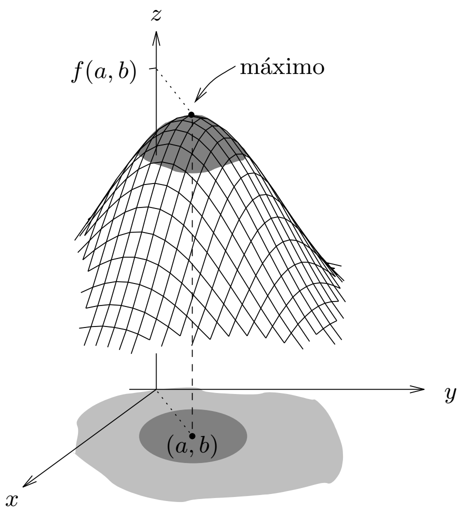
   no ponto $P_0 = (1, 2, -1)$ e a equação do plano tangente à superfície referida, no ponto P_0.

8. Seja $f(x, y, z) = xy + yz + zx$. Escreva a equação da superfície de nível de f que contém o ponto $P_0 = (1, 1, 0)$ e determine a equação do plano tangente a esta superfície em P_0.

1.4 Extremos livres

Uma das aplicações do cálculo diferencial é a determinação de extremos de uma função. Comecemos por definir *extremo* (local) de uma função de duas variáveis.

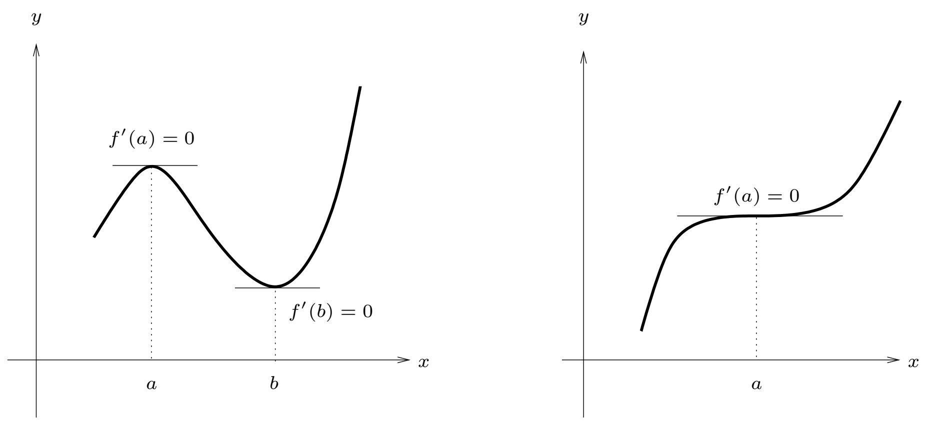
Definição 6 Uma função $z = f(x, y)$ tem um *máximo* [*mínimo*] (local) no ponto (a, b) se para pontos próximos de (a, b) se tem $f(x, y) \leq f(a, b)$ [resp. $f(x, y) \geq f(a, b)$].



Para funções deriváveis de uma variável sabe-se que

$$\boxed{\text{Se } f \text{ tem um extremo em } a \text{ então } f'(a) = 0}$$

Por outras palavras, se f tem um extremo, o respectivo gráfico tem nesse ponto uma recta tangente horizontal.



Este facto permite-nos reduzir os pontos candidatos a pontos onde ocorrem extremos aos pontos críticos de f.

Se f admite 2^a derivada, é à 2^a derivada que se recorre para decidir se um dado ponto crítico a é um ponto onde ocorre um extremo ou um ponto de inflexão:

– Se $f''(a) > 0$ então $f(a)$ é um mínimo;

– Se $f''(a) < 0$ então $f(a)$ é um máximo;

– Se $f''(a) = 0$ nada se pode concluir e temos que recorrer à definição de extremo.

A procura de extremos para funções de duas variáveis com 2^{as} derivadas parciais contínuas faz-se de forma análoga.

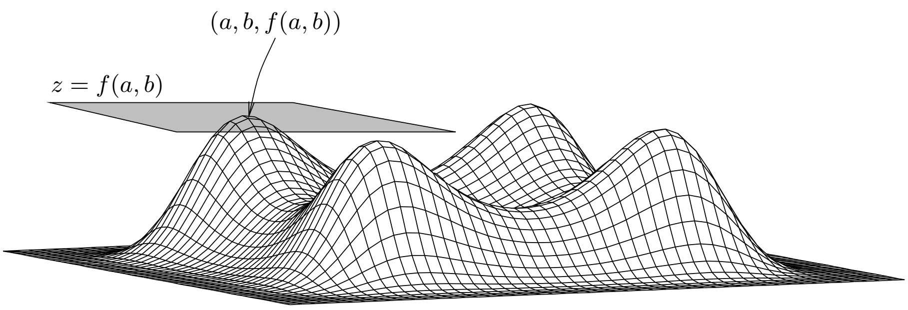
Comecemos por notar que se $z = f(x, y)$ tem um extremo em (a, b) então as funções de uma só variável $f(x, b)$ e $f(a, y)$ também terão um extremo respectivamente em $x = a$ e $y = b$. Assim,

$$[f(x,b)]'\,|_{x=a} = 0 \qquad \text{e} \qquad [f(a,y)]'\,|_{y=b} = 0.$$

Como vimos em 1.2 as derivadas referidas são precisamente as derivadas parciais de f e portanto

> Se f tem um extremo em (a, b) então
>
> $$\operatorname{grad} f(a,b) = (0,0) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} f'_x(a,b) = 0 \\ f'_y(a,b) = 0 \end{cases}$$

o que significa que o plano tangente ao gráfico de f em (a, b) é horizontal.



Definição 7 Um ponto (a, b) diz-se um ponto *crítico* (ou de *estacionaridade*) de f se $\text{grad}\, f(a, b) = \vec{0}$.

É entre os pontos críticos que devemos procurar os extremos de uma função de duas variáveis.

Exemplo 27 Considerando $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4$ é fácil ver que $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f. De facto,

$$\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \\ f'_y = 2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Além disso,

$$f(x, y) - f(0, 0) = x^2 + y^2 + 4 - 4 = x^2 + y^2 > 0, \qquad \forall\, (x, y) \neq (0, 0).$$

Conclui-se então que $(0, 0)$ é um ponto onde ocorre um mínimo de f.

Nem todos os pontos críticos são extremos.

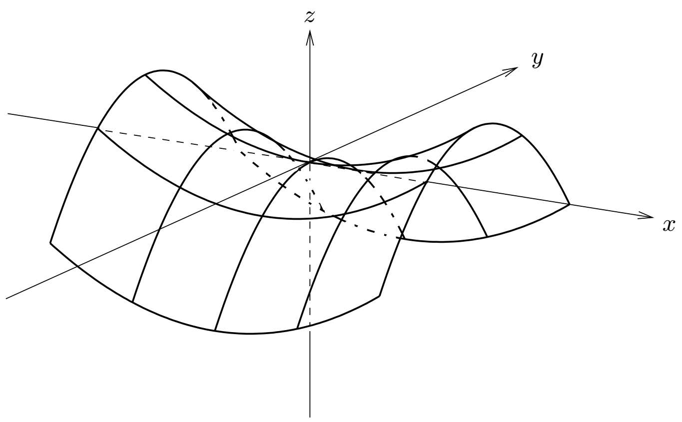
Exemplo 28 Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$. Tem-se

$$\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \\ f'_y = -2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

e consequentemente $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f.
Para analisar o sinal de $f(x, y) - f(0, 0)$ começamos por considerar pontos da forma $(x, 0)$ (pontos que estão no eixo dos xx) e da forma $(0, y)$ (pontos que estão no eixo dos yy). Assim

$$\begin{aligned} f(x, 0) - f(0, 0) = x^2 &\geq 0, \qquad \forall x, \\ f(0, y) - f(0, 0) = -y^2 &\leq 0 \qquad \forall y, \end{aligned}$$

o que basta para concluir que $f(x, y) - f(0, 0)$ não mantém o sinal constante perto de $(0, 0)$ e portanto que em $(0, 0)$ não ocorre um extremo de f.



Definição 8 Um ponto crítico de f onde não ocorre um extremo diz-se um ponto de *sela*.

Para determinar a natureza de um ponto crítico, isto é, para saber se um ponto crítico é um ponto onde ocorre um extremo (e nesse caso se o extremo é um mínimo ou um máximo) ou se é um ponto de sela, vamos recorrer a um teste em que a matriz Hessiana de f vai desempenhar um papel análogo ao papel desempenhado pela 2^a derivada de f para funções de uma variável.

Critério da matriz Hessiana para a classificação de extremos

Seja f uma função com derivadas parciais de 2^a ordem contínuas e (a, b) um ponto crítico de f. Então:

1. Se $\det H_f(a, b) > 0$ então $f(a, b)$ é um extremo:

   – máximo, se $f''_{x^2}(a, b) < 0$;

   – mínimo, se $f''_{x^2}(a, b) > 0$.

2. Se $\det H_f(a, b) < 0$ então (a, b) é um ponto de sela.

3. Se $\det H_f(a, b) = 0$ o critério não é conclusivo e é necessário recorrer à definição de extremo.

Exemplo 29 Consideremos $f(x,y) = 4x^3 + 4xy - y^2 - 4x$. Comecemos por determinar os pontos críticos de f. Ora,

$$\begin{cases} f'_x = 12x^2 + 4y - 4 = 0 \\ f'_y = 4x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + y - 1 = 0 \\ 2x = y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 = 0 \\ 2x = y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Os pontos críticos de f são $(-1,-2)$ e $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$. A matriz Hessiana de f é $\begin{bmatrix} 24x & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Para o ponto $(-1,-2)$ tem-se $H_f(-1,-2) = \begin{bmatrix} -24 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $\det H_f(-1,-2) = 32 > 0$ e $f''_{x^2}(-1,-2) < 0$, e portanto $f(-1,-2) = 4$ é um máximo de f que ocorre em $(-1,-2)$.

Para o ponto $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ tem-se $H_f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right) = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $\det H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = -32 < 0$ e portanto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ é um ponto de sela.

Exemplo 30 Seja $f(x,y) = (x-1)e^{xy}$. Comecemos por determinar os pontos críticos de f. Ora,

$$\begin{cases} f'_x = e^{xy} + (x-1)ye^{xy} = 0 \\ f'_y = (x-1)x\underbrace{e^{xy}}_{\neq 0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{xy}(1 + xy - y) = 0 \\ x = 0 \vee x = 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \bigvee \underbrace{\begin{cases} 1 + y - y = 0 \\ x = 1 \end{cases}}_{\text{Impossível}}$$

Portanto $(0,1)$ é ponto crítico de f. Tem-se

$$H_f = \begin{bmatrix} ye^{xy} + ye^{xy} + (x-1)y^2e^{xy} & xe^{xy} + (x-1)e^{xy} + x(x-1)ye^{xy} \\ xe^{xy} + (x-1)e^{xy}(x-1)ye^{xy} & (x-1)x^2e^{xy} \end{bmatrix}.$$

Logo, $H_f(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\det H_f(0,1) = -1$ e portanto $(0,1)$ é um ponto de sela.

EXEMPLO 31 Consideremos por último $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 4x^2y$. Resolvendo o sistema

$$
\begin{aligned}
\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}
&\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 - 8xy = 0 \\ 4y^3 - 4x^2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 8x(x^2 - y) = 0 \\ x^2 = y^3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \vee \ y = x^2 \\ x^2 = y^3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = x^6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = x^2 \\ x^2(1 - x^2)(1 + x^2) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \ \vee \ x = 1 \ \vee \ x = -1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

obtemos os pontos críticos de f, $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$. Para investigar a natureza destes pontos críticos vamos calcular a matriz Hessiana de f

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 24x^2 - 8y & -8x \\ -8x & 12y \end{bmatrix}.$$

Então

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}, \quad \det H_f(1,1) = 16 \times 12 - 8^2 = 128 > 0, \quad f''_{x^2}(1,1) = 16 > 0,$$

e portanto $f(1,1)$ é um mínimo de f.

Para o ponto $(-1,1)$ tem-se

$$H_f(-1,1) = \begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}, \quad \det H_f(-1,1) = 128, \quad f''_{x^2}(-1,1) = 16$$

e portanto $f(-1,1)$ é também um mínimo local.

Finalmente,

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det H_f(0,0) = 0.$$

Neste caso temos que estudar o sinal de

$$f(x,y) - f(0,0) = 2x^4 + y^4 - 4x^2y.$$

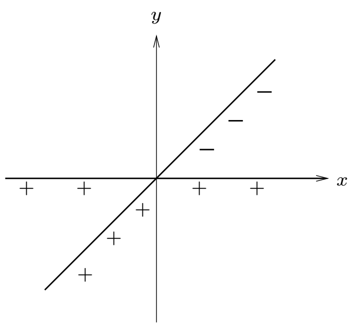
Considerando pontos da recta $y = 0$,

$$f(x,0) - f(0,0) = 2x^4 \geq 0.$$

Considerando pontos da recta $y = x$, tem-se

$$f(x,x) - f(0,0) = 3x^4 - 4x^3 = x \cdot \underbrace{x^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(3x-4)}_{<0 \text{ perto de } (0,0)}.$$

Daqui resulta que o sinal de $f(x,y) - f(0,0)$ não é constante em pontos perto de $(0,0)$. Logo $(0,0)$ é um ponto de sela de f.



O estudo dos extremos de uma função de 3 variáveis com 2^{as} derivadas parciais contínuas faz-se de forma análoga.

Considerando $w = f(x, y, z)$ começa-se por determinar os pontos críticos de f resolvendo o sistema

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases}$$

Para determinar a natureza dos pontos críticos recorre-se a um critério que envolve a matriz Hessiana de f, de que o critério estabelecido anteriormente para funções de duas variáveis é um caso particular.

Antes de estabelecermos esse critério necessitamos de fixar alguma notação.

Dada uma matriz quadrada de ordem 3,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

denotamos por

$$d_1 = \det[a_{11}] = a_{11}, \quad d_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad d_3 = \det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

<u>Critério da matriz Hessiana para a classificação de extremos</u>

Seja f uma função com derivadas parciais de 2^a ordem contínuas e (a, b, c) um ponto crítico de f. Então:

1. Se $\det H_f(a, b, c) \neq 0$ e

   - se $d_1,\ d_2,\ d_3 > 0$ então $f(a, b, c)$ é um mínimo de f;

   - se $d_1 < 0,\ d_2 > 0,\ d_3 < 0$ então $f(a, b, c)$ é um máximo de f;

   - Em qualquer outro caso, (a, b, c) é um ponto sela.

2. Se $\det H_f(a, b, c) = 0$ o critério não é conclusivo e é necessário recorrer à definição de extremo.

Exemplo 32 Seja $f(x,y,z) = x^3 + xy^2 + x^2 + y^2 + 3z^2$. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ f'_y = 2xy + 2y = 0 \\ f'_z = 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ y(x+1) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \bigvee \underbrace{\begin{cases} y^2 = -1 \\ x = -1 \\ z = 0 \end{cases}}_{\text{Impossível}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

obtemos os pontos críticos $(0,0,0)$ e $\left(-\dfrac{2}{3}, 0, 0\right)$.

Tem-se

$$H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 6x+2 & 2y & 0 \\ 2y & 2x+2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Para $(0,0,0)$ tem-se

$$H_f(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$d_1 = 2, \qquad d_2 = 4, \qquad d_3 = \det H_f(0,0,0) = 24$$

e portanto $f(0,0,0)$ é um mínimo de f.

Para $\left(-\dfrac{2}{3}, 0, 0\right)$ tem-se

$$H_f\left(-\frac{2}{3}, 0, 0\right) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

$$d_1 = -2, \qquad d_2 = -\frac{4}{3}, \qquad d_3 = \det H_f\left(-\frac{2}{3}, 0, 0\right) = -8$$

e $\left(-\frac{2}{3}, 0, 0\right)$ é um ponto de sela.

Exercícios 4

1. Determine os pontos críticos das seguintes funções e estude a sua natureza:

   (a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

   (b) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 8x^2y^2 + 12x^3$.

   (c) $f(x, y) = (x - 1)(3 - x)y^3 - y$.

   (d) $f(x, y) = x + y + 1/x + 4/y$.

   (e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$.

2. Considere $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 + ay^2$, com $-1 \leq a \leq 1$.

   (a) Analise, para os diferentes valores de a, a existência de extremos locais da função f.

   (b) Interprete geometricamente o problema.

3. Seja $f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$, em que k é uma constante.

   (a) Mostre que f admite um ponto crítico em $(0, 0)$ independente do valor de k.

   (b) Para que valores de k o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela? Justifique a resposta.

4. Calcule, justificando convenientemente, os valores de a, b e c para que

$$f(x, y) = a - (x^2 + bx + y^2 + cy)$$

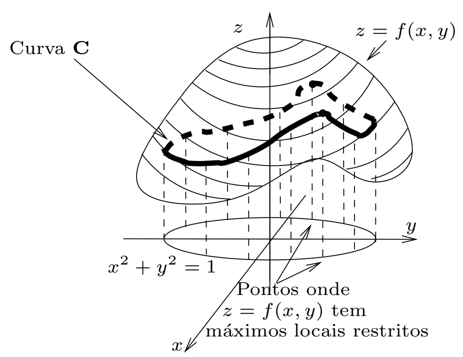
   tenha um máximo de valor 15 no ponto $(-2, 1)$.

5. Prove que $(1, 1, 1)$ é um ponto crítico de $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ e determine a sua natureza.

1.5 Extremos condicionados

No ponto anterior apresentou-se a teoria relativa aos extremos locais de uma função $z = f(x, y)$ de 2 variáveis independentes.

Frequentemente encontramos problemas onde é necessário determinar os extremos de uma função $z = f(x, y)$, em que as variáveis estão ligadas por uma condição que se traduz numa restrição ao domínio da função. Por exemplo, a condição $x^2 + y^2 = 1$ restringe o domínio de uma função $f(x, y)$ aos pontos da circunferência de raio 1 e centro na origem. O significado geométrico deste problema está ilustrado na seguinte figura:



O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ intersecta o gráfico de $z = f(x, y)$ segundo uma curva **C**. O problema de maximizar (ou minimizar) $f(x, y)$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$ resume-se a determinar o(s) ponto(s) de **C** onde z é máximo (mínimo).

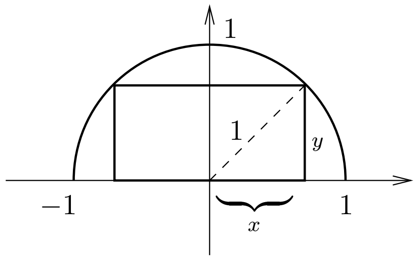
De uma forma geral, pretendemos maximizar (ou minimizar) localmente uma função $f(x, y)$ sujeita à restrição $g(x, y) = 0$. No exemplo anterior, tinha-se $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. A notação usual para traduzir esta questão é

$$\begin{aligned} \max\ (\min) \quad & f(x, y) \\ \text{s.a.} \quad & g(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Chama-se a este tipo de problema um problema de *extremos condicionados*, ou com restrições.

Exemplo 33 Pretendemos determinar as dimensões do rectângulo de área máxima inscrito numa semi-circunferência de raio 1.

Neste caso, a função a maximizar é $f(x,y) = 2xy$, definida apenas para $x > 0$ e $y > 0$, atendendo ao significado de x e y, ilustrado na figura. Formulando o problema enquanto problema de extremos condicionados, pretendemos



$$\begin{array}{lrcl} \max & f(x,y) & = & 2xy \\ \text{s.a.} & x^2+y^2-1 & = & 0 \end{array}$$

Podemos utilizar a restrição para escrever a função como função de uma só variável. Tem-se:

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

e

$$f(x,\sqrt{1-x^2}) = 2x\sqrt{1-x^2}\ , \quad x \in]0,1[$$

Este é agora um problema de optimização livre, para uma função de uma só variável, que vamos designar por $F(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

Determinando os pontos críticos de F,

$$F'(x) = 0,\ x \in]0,1[\iff \frac{2-4x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \iff x = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Conclui-se que $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é o único ponto crítico de F. Calculando $F''(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -8 < 0$, conclui-se que $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é um ponto de máximo. Portanto, o rectângulo de área máxima tem lados de comprimento

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

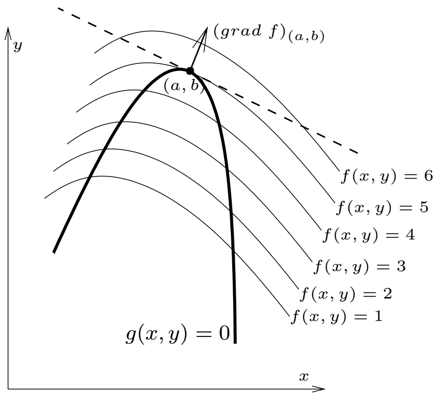
e o valor máximo de f é 1.

Frequentemente, o método de resolução que seguimos é, na prática, impossível de aplicar, pois nem sempre conseguimos, a partir da restrição dada, explicitar uma das variáveis em função da(s) restante(s).

Vamos encontrar um método de resolução alternativo para os problemas de extremos condicionados, com o auxílio das propriedades geométricas do gradiente.

Retomemos o problema geral

$$\begin{aligned} \max\ (\min) \qquad & f(x,y) \\ \text{s.a.} \qquad & g(x,y) = 0 \end{aligned}$$



Na figura estão representados a curva de nível zero de uma função, g, $g(x,y) = 0$ e várias curvas de nível de uma função f, $f(x,y) = c$. Uma vez que o domínio de f está restringido aos pontos da curva $g(x,y) = 0$, apenas nos pontos de intersecção das curvas de nível de f com $g(x,y) = 0$, f toma valores. Para determinar o valor máximo de $f(x,y)$ sobre a curva $g(x,y) = 0$, procuramos o maior valor de c, tal que $f(x,y) = c$ intersecte $g(x,y) = 0$. No ponto (a,b) onde tal sucede, as duas curvas vão admitir a mesma recta tangente (indicada a tracejado na figura).

Como sabemos, os vectores grad $f(a,b)$ e grad $g(a,b)$ são perpendiculares às curvas de nível de f e g que passam no ponto (a,b), e portanto são perpendiculares à tangente comum às duas curvas nesse ponto. Resulta que grad $f(a,b)$ e grad $g(a,b)$ são colineares, isto é,

$$\exists\ \lambda \in \mathbb{R}\ :\ \text{grad}\, f(a,b) = \lambda\ \text{grad}\, g(a,b).$$

Tem-se então a seguinte condição necessária à existência de um extremo condicionado.

> Se (a,b) é uma solução do problema de extremos (locais) condicionados
>
> $$\begin{array}{rl} \max\,(\min) & f(x,y) \\ \text{s.a.} & g(x,y)=0 \end{array}$$
>
> e $\operatorname{grad} g(a,b) \neq \vec{\mathbf{0}}$, então:
>
> $$\exists\ \lambda \in \mathbb{R} \quad : \quad \operatorname{grad} f(a,b) \ = \ \lambda \operatorname{grad} g(a,b).$$

Este resultado pode ser reformulado de forma equivalente se definirmos a função auxiliar de 3 variáveis

$$L(x,y,\lambda) \ = \ f(x,y) - \lambda\, g(x,y).$$

Esta função auxiliar L chama-se *função Lagrangeana* do problema e a variável λ diz-se um *multiplicador de Lagrange.*

É fácil verificar que o sistema de equações que define os pontos críticos de L, isto é,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} \ = \ \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \ = \ 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial y} \ = \ \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \ = \ 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \ = \ -g(x,y) \ = \ 0 \end{cases}$$

corresponde ao sistema

$$\begin{cases} \operatorname{grad} f(x,y) \ = \ \lambda \operatorname{grad} g(x,y) \\ \\ g(x,y) \ = \ 0. \end{cases}$$

Os extremos condicionados de f são determinados a partir das soluções deste sistema.

Em conclusão, para determinar todos os possíveis extremos condicionados de $f(x,y)$ sujeita à restrição $g(x,y)=0$, podemos recorrer ao *método dos multiplicadores de Lagrange*, que consiste em:

1. construir a função $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\, g(x, y)$;
2. determinar os pontos criticos de L.

Observemos que este método apenas permite localizar potenciais extremos *locais* condicionados de f. Para determinar a natureza deste pontos (máximos, mínimos ou outro caso) existe um critério baseado nas derivadas de segunda ordem de L. No entanto, em muitos problemas é possível identificar a natureza dos pontos críticos utilizando argumentos decorrentes da natureza do problema.

Exemplo 34 Pretende-se determinar

$$\begin{array}{rrcl} \max\ (\min) & f(x,y) & = & 2xy \\ \text{s.a.} & g(x,y) & = & x^2+y^2-1 \ = \ 0. \end{array}$$

Uma vez que $\operatorname{grad} g(x, y) = (2x, 2y)$ não se anula em pontos da circunferência $x^2+y^2 = 1$, vamos utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange, definindo a função Lagrangeana associada a este problema:

$$L(x, y, \lambda) \ = \ 2xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Os pontos críticos desta função são as soluções do sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \frac{\partial L}{\partial x} & = & 2y - 2\lambda x & = & 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial y} & = & 2x - 2\lambda y & = & 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} & = & -(x^2+y^2-1) & = & 0 \end{array}\right. ,$$

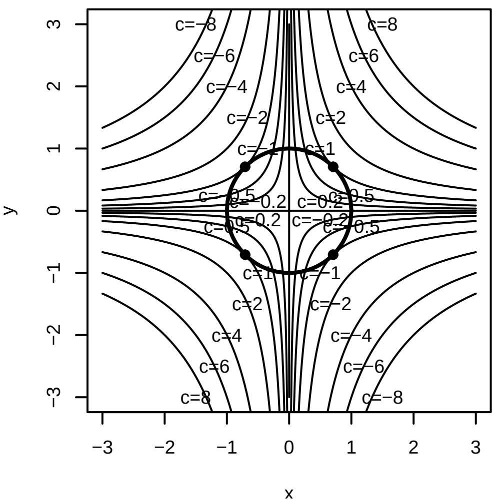
que são

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \lambda x \\ x & = & \lambda y \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \lambda^2 y \\ x & = & \lambda y \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

A primeira equação admite soluções $y = 0$ ou $\lambda^2 = 1$. Mas a primeira destas soluções obriga a que também $x = 0$, o que torna a última equação impossível. Partindo das outras possíveis soluções para a primeira equação, tem-se:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 1 \\ x & = & y \\ 2y^2 & = & 1 \end{array}\right. \quad \vee \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -1 \\ x & = & -y \\ 2y^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

A última equação, comum aos dois sistemas, admite soluções $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, pelo que existem quatro pontos críticos da função Lagrangeana que, escrevendo apenas as respectivas coordenadas x e y, são: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (correspondentes a $\lambda = 1$) e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (correspondentes a $\lambda = -1$).



Para decidir da natureza destes pontos, interpretemos geometricamente o problema. As curvas de nível de f são as hipérboles $2xy = c$, representadas na figura. Quanto mais distantes estiverem estas hipérboles da origem, maior será o valor absoluto de c. Como $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$ e $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -1$, concluímos que $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ são pontos de máximo e que $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ são pontos de mínimo.

Exemplo 35 Pretende-se determinar os pontos da curva $y^2 = 4x$ que estão à distância mínima do ponto $(1, 0)$.

Minimizar a distância ou o seu quadrado são problemas equivalentes e por conveniência de cálculos consideramos o problema de identificar os extremos do quadrado da distância

$$\begin{array}{rrcl} \max\ (\min) & f(x,y) & = & (x-1)^2+y^2 \\ \text{s.a.} & g(x,y) & = & 4x-y^2 \ = \ 0. \end{array}$$

Uma vez que $\operatorname{grad} g(x,y)=(4,-2y)\neq\vec{0}$ vamos construir a função Lagrangeana,

$$L(x,y,\lambda) \ = \ (x-1)^2+y^2-\lambda(4x-y^2).$$

e calcular os respectivos pontos críticos:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x}=2(x-1)-4\lambda=0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial y}=2y+2\lambda y=0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=-(4x-y^2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-1=2\lambda \\ \\ y(1+\lambda)=0 \\ \\ 4x-y^2=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda=-\frac{1}{2} \\ \\ y=0 \\ \\ x=0 \end{array}\right. \bigvee \underbrace{\left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ \\ \lambda=-1 \\ \\ -4=y^2 \end{array}\right.}_{\text{Impossível}}$$

O único ponto crítico encontrado é $(0,0)$ que corresponde ao ponto de $4x-y^2$ à distância mínima de $(1,0)$.

O método dos multiplicadores de Lagrange pode facilmente ser estendido ao caso de mais variáveis.

Vejamos um problema de extremos de uma função de três variáveis, com uma restrição associada.

EXEMPLO 36 Pretende-se calcular o máximo e o mínimo de $f(x,y,z) = x - y + 2z$, no elipsóide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$. Trata-se de um problema de extremos condicionados, cuja tradução é

$$\begin{array}{rl} \max\ (\min) & f(x,y,z) = x - y + 2z \\ \text{s.a.} & g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 = 0 \end{array}$$

em que grad $g(x,y,z) = (2x, 2y, 4z)$ não se anula em nenhum ponto do elipsóide.
A função Lagrangeana é

$$L(x,y,z,\lambda) \;=\; x - y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 2).$$

Os seus pontos críticos são as soluções do sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} \frac{\partial L}{\partial x} & = & 1 - 2\lambda x & = & 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial y} & = & -1 - 2\lambda y & = & 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial z} & = & 2 - 4\lambda z & = & 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} & = & -(x^2 + y^2 + 2z^2 - 2) & = & 0 \end{array} \right. , \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \frac{1}{2\lambda} \\ \\ y & = & -\frac{1}{2\lambda} \\ \\ z & = & \frac{1}{2\lambda} \\ \\ x^2 + y^2 + 2z^2 & = & 2 \end{array} \right.$$

sendo a divisão por λ possível, uma vez que $\lambda = 0$ não é solução do sistema inicial. Substituindo as expressões para x, y e z na última equação, vem:

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{2}{4\lambda^2} \;=\; 2 \quad \iff \quad \lambda = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Estes possíveis valores para λ geram, após substituição nas outras equações do sistema, os pontos críticos cujas coordenadas em (x,y,z) são: $A = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $B = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.
Uma vez que

$$\begin{array}{rcl} f(A) & = & 2\sqrt{2} \\ f(B) & = & -2\sqrt{2} \end{array}$$

conclui-se que o máximo é $2\sqrt{2}$ (alcançado no ponto A) e o mínimo (atingido em B) é $-2\sqrt{2}$.

De facto, do ponto de vista geométrico, as superfícies de nível de $f(x, y, z)$ são, neste caso, os planos, paralelos entre si, de equação $x - y + 2z = k$. Determinámos o maior e o menor valor de k para os quais os planos correspondentes intersectam o elipsóide (sendo tangentes).

Exercícios 5

1. Determine o maior e o menor dos valores de $f(x, y) = xy$ sobre a elipse de equação $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

2. De entre todas as caixas paralelipipédicas de área total 10 m^2, pretende-se determinar a de maior volume.

3. Maximize a função $f(x, y, z) = x + z$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4. Determine o ponto da superfície $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ mais próximo do ponto $(2, 0, 1)$.

Capítulo 2

Integrais duplos

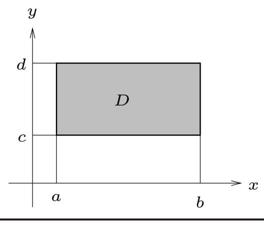
Pretende-se estender a noção já conhecida de integral (definido) de uma função de uma variável real ao caso de duas variáveis (o caso de três ou mais variáveis é análogo). A noção de integral num contexto mais geral está fora do âmbito deste curso, pelo que vamos restringir-nos ao estudo de funções contínuas em certos tipos de domínios.

Relembremos que o estudo do integral definido foi motivado pelo cálculo de àreas de regiões delimitadas por gráficos de funções não negativas. Agora vamos estar interessados em volumes.

Consideremos $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua, $f(x, y) \geq 0$, sendo $D = [a, b] \times [c, d]$.

Recordemos que $[a, b] \times [c, d]$ designa o *produto cartesiano* dos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$, isto é,

$$R = [a, b] \times [c, d] = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [a, b], \ y \in [c, d]\Big\}.$$



Se fixarmos a variável x, fazendo $x = \alpha$, obtemos uma função contínua $f(\alpha, y)$ de uma só variável y e faz sentido calcular,

$$A(\alpha) = \int_c^d f(\alpha, y)dy,$$

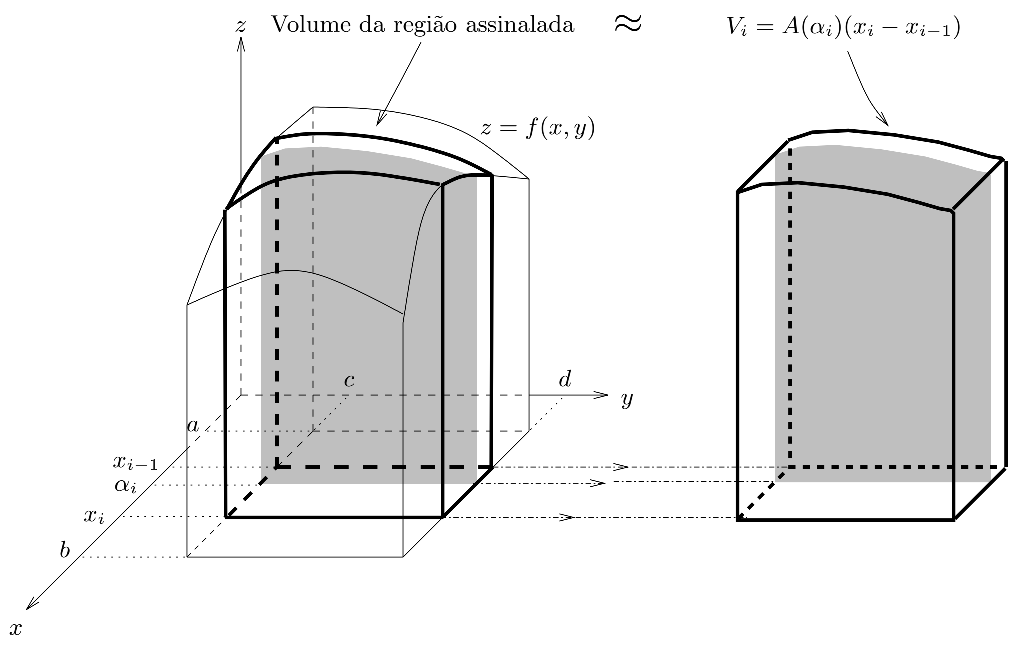
que é exactamente a àrea da região do plano $x = \alpha$ delimitada superiormente por $z = f(\alpha, y)$ e inferiormente por $z = 0$ no intervalo $[c, d]$.

Consideremos $n + 1$ pontos do intervalo $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ e escolhamos em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ um ponto arbitrário α_i.

Tem-se,

$$A(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) = V_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

que nos dá uma aproximação ao volume da região delimitada superiormente pelo gráfico de $z = f(x, y)$, inferiormente por $z = 0$ e lateralmente pelos planos $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = c$ e $y = d$.



As somas

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_n,$$

dão-nos uma aproximação ao volume da região do espaço delimitada superiormente pelo gráfico de $z = f(x, y)$, inferiormente por $z = 0$ e lateralmente pelos planos $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$. Se tomarmos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de amplitudes cada vez menores, as somas $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ vão convergir para

$$V = \int_a^b A(x)dx,$$

que define rigorosamente o volume da região delimitada superiormente pelo gráfico de $z = f(x, y)$, inferiormente por $z = 0$ e lateralmente pelos planos $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$. Como $A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$, tem-se

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

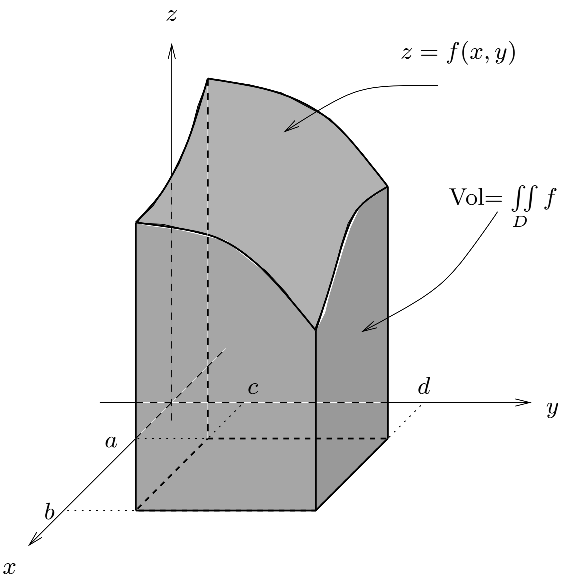
Se tivessemos fixado inicialmente, não a variável x, mas a variável y fazendo $y = \beta$ e se tivéssemos procedido de modo análogo obtínhamos

$$V = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

Em resumo,

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

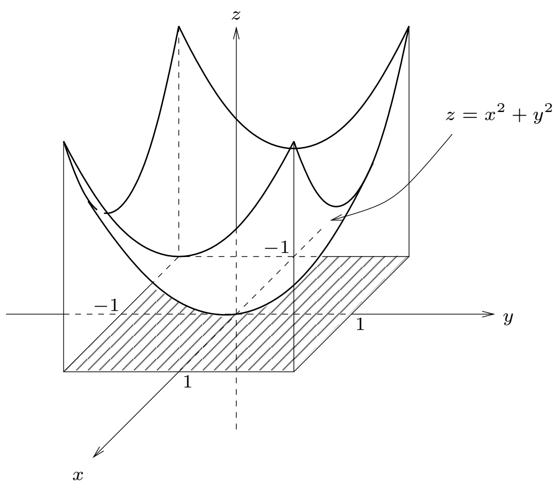
A este integral chamamos *integral duplo de f em D*.



EXEMPLO 37

Pretende-se calcular $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$,

$$D=[-1,1]\times[-1,1]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ -1\le x\le 1,\quad -1\le y\le 1\,\}.$$



Ora,

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)dx\,dy &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)dx\right)dy\\
&= \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{-1}^{1}dy\\
&= \int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{3}+2y^2\right)dy\\
&= \frac{2}{3}\left[y+y^3\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

EXEMPLO 38

Calcular $\displaystyle\iint_D y\sin x\,dx\,dy$,

$$D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le y\le 2\,\}.$$

Tem-se,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D y\sin x\,dy\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^2 y\sin x\,dy\right)dx\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,\sin x\,dx\\
&= -2\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= -2\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=2.
\end{aligned}$$

Exemplo 39

Calcular

$$\iint\limits_D \frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy,$$

sendo $D=[0,2]\times[0,1]$. Tem-se,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2}dx\,dy &= \int_0^2\left(\int_0^1 \frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2}dy\right)dx\\
&= \int_0^2\left[\frac{-2x}{x^2+y^2+1}\right]_0^1 dx\\
&= \int_0^2\left(-\frac{2x}{x^2+2}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx\\
&= \left[-\log(x^2+2)+\log(x^2+1)\right]_0^2\\
&= -\log\ 6+\log\ 5+\log\ 2-\log\ 1=\log\ \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

As propriedades operatórias estudadas para o integral definido admitem uma generalização para o integral duplo.

Propriedades do integral duplo

Sejam $f,g:D\to\mathbb{R}$ duas funções contínuas. Então:

1. $\displaystyle\iint_D (f+g) = \iint_D f + \iint_D g.$

2. Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\iint_D (\alpha f) = \alpha \iint_D f.$

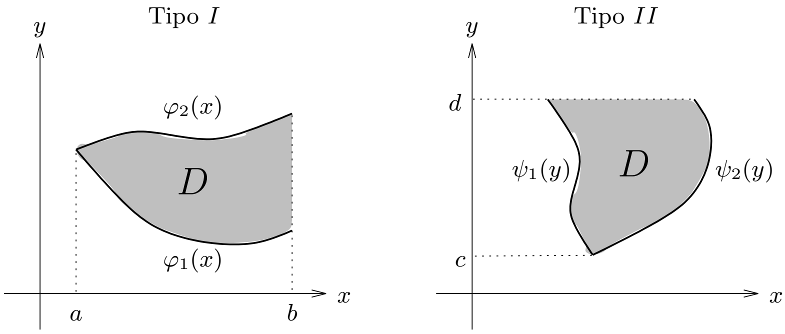
3. Se $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo o $(x,y) \in D$, então $\displaystyle\iint_D f \quad \geq \quad \iint_D g.$

Vejamos agora como podemos estender a noção de integral duplo a domínios de um certo tipo designados por *domínios elementares*.

Definição 9 Dizemos que um subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ é *elementar* se for de um dos seguintes dois tipos:

(I) $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\Big\}$, com φ_1 e φ_2 duas funções contínuas em $[a,b]$ com $\varphi_2 \geq \varphi_1$.

(II) $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\Big\}$, com ψ_1 e ψ_2 duas funções contínuas em $[c,d]$ com $\psi_2 \geq \psi_1$.



Por outras palavras, um conjunto D é elementar se uma das variáveis tomar valores num intervalo fechado e limitado e a outra variável tomar valores entre os gráficos de duas funções contínuas. Os rectângulos são exemplos de conjuntos elementares simultaneamente dos dois tipos.

O integral duplo admite uma generalização natural para conjuntos elementares.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua num conjunto elementar D. Então:

1. Se D é do tipo I,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

2. Se D é do tipo II,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Se D é simultâneamente dos dois tipos,

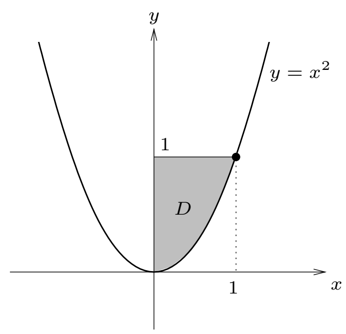
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Exemplo 40

Pretende-se calcular

$$\iint\limits_D (x+y^3)dx\,dy,$$

em que $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq 1\}$



Daqui resulta que

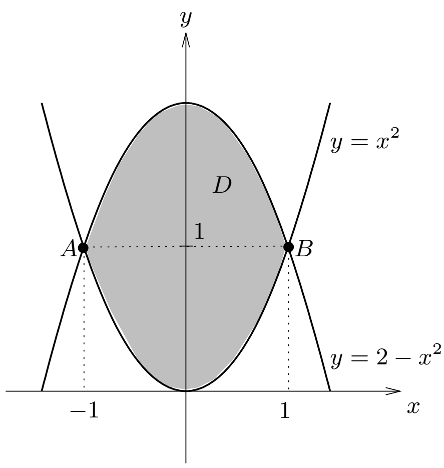
$$\begin{aligned}
\iint\limits_D (x+y^3)dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \left(x+y^3\right) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^4}{4} \right]_{x^2}^1 dx \\
&= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{4} - x^3 - \frac{x^8}{4} \right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^9}{36} \right]_0^1 = \frac{17}{36}.
\end{aligned}$$

Exemplo 41

Pretende-se calcular

$$\iint\limits_D xe^{2y}\,dx\,dy,$$

em que D é o subconjunto elementar delimitado pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$.



Para determinar os pontos de intersecção entre as duas curvas resolve-se o sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = 2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Obtemos os dois pontos $A = (-1, 1)$ e $B = (1, 1)$. Daqui resulta que

$$\begin{aligned}\iint_D xe^{2y}\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x^2}\left(xe^{2y}\right)dy\right)dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{xe^{2y}}{2}\right]_{x^2}^{2-x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\left(e^{4-2x^2} - e^{x^2}\right)dx = \cdots = 0.\end{aligned}$$

Como vimos anteriormente, quando o domínio do integral é um conjunto elementar podemos escolher a ordem pela qual queremos efectuar a integração. Essa escolha prende-se, essencialmente, por duas razões: a primitivação ser mais fácil (ou ser possível) em ordem a uma das variáveis; os domínios de integração terem uma descrição mais simples enquanto conjuntos elementares de um dos tipos (I) ou (II).

Vejamos exemplos para os quais não é indiferente a ordem de integração.

Exemplo 42

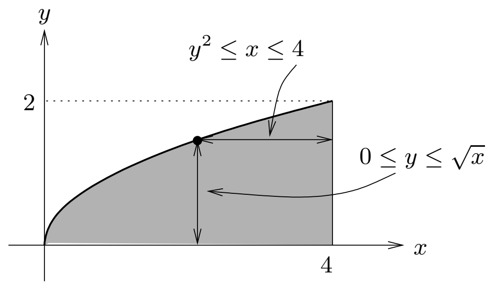
Pretende-se calcular

$$\int_0^2\int_{y^2}^4 y\cos(x^2)dx\,dy.$$

A primitiva em ordem a x da função $y\cos(x^2)$ não é imediata nem pode ser calculada recorrendo à primitivação por partes nem por substituição, enquanto que a primitiva em ordem a y da função $y\cos(x^2)$ é $\frac{y^2}{2}\cos(x^2)$. Por essa razão vamos efectuar uma mudança na ordem de integração. O domínio de integração D é a região de $\mathbb{R}^2$,

$$\{(x, y) : y^2 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 2\} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x}\},$$

atendendo a que $x = y^2$ com $x \geq 0$ é equivalente a $y = \sqrt{x}$.



Assim teremos

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \left(\int_{y^2}^4 y\cos(x^2)dx \right) dy \quad & \overset{\text{Mud. ordem integ.}}{=\!=} \quad \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y\cos(x^2)dy \right) dx \\
& = \quad \int_0^4 \left[\frac{y^2}{2}\cos(x^2) \right]_0^{\sqrt{x}} dx \\
& = \quad \int_0^4 \frac{x}{2}\cos(x^2)dx \\
& = \quad \frac{1}{4}\int_0^4 \cos(x^2)2xdx \\
& = \quad \frac{1}{4}\Big[\sin(x^2)\Big]_0^4 \\
& = \quad \frac{1}{4}\sin(16).
\end{aligned}$$

Exemplo 43

Pretende-se calcular

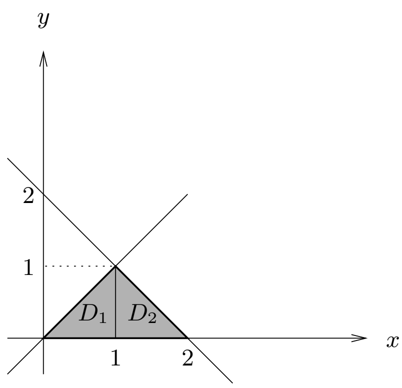
$$\iint_D 2xydx\,dy,$$

onde $D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x,\ x+y \leq 2\}$. Vamos começar por calcular o integral, integrando em primeiro lugar em ordem à variável y. Para isso temos que considerar a partição de D nos conjuntos

$$D_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\},$$

e

$$D_2 = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2-x\}.$$



Nessa altura vem

$$\begin{aligned}\iint_D 2xy\,dx\,dy &= \iint_{D_1} 2xy\,dx\,dy + \iint_{D_2} 2xy\,dx\,dy\\ &= \int_0^1 \int_0^x 2xy\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} 2xy\,dy\,dx.\end{aligned}$$

Se trocarmos a ordem de integração o cálculo do integral fica simplificado:

$$\begin{aligned}\iint_D 2xy\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_y^{2-y} 2xy\,dx\,dy\\ &= \int_0^1 [x^2 y]_y^{2-y} dy\\ &= \int_0^1 \left[(2-y)^2 y - y^3\right] dy\\ &= \int_0^1 (4y-4y^2)dy\\ &= \left[2y^2 - \frac{4}{3}y^3\right]_0^1\\ &= 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

A escolha da ordem de integração facilitou o cálculo do integral.

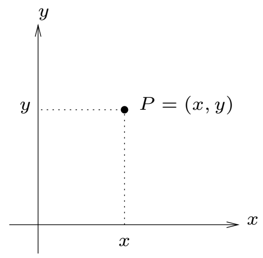
Mudança de variável para coordenadas polares

No cálculo do integral definido era por vezes necessário proceder a uma mudança de variável de modo a facilitar (possibilitar) o cálculo da primitiva da função integranda.

Também no integral duplo é preciso, por vezes, recorrer a mudanças de variável agora com o duplo objectivo de simplificar (possibilitar) a integração e a descrição do domí nio de integração.

Estudaremos apenas a mudança de variável para coordenadas polares, que passamos a definir.

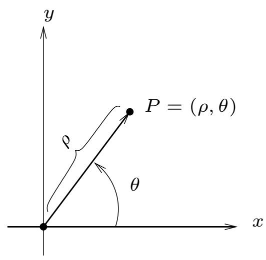
É usual referenciar um ponto P de $\mathbb{R}^2$ pelas suas *coordenadas cartesianas*, (x, y), isto é, $P = (x, y)$.



Vejamos como referenciar um ponto num sistema de coordenadas polares.

Seja O a origem do referencial. Um ponto $P \neq O$ fica referenciado pela respectiva distância a O, que designamos por ρ ($\rho > 0$) e pelo ângulo que $\vec{OP}$ fez com o eixo xx, que designamos por θ ($0 \leq \theta < 2\pi$).

Ao par (ρ, θ) chamamos *coordenadas polares de* P.



É fácil de ver as relações entre as coordenada cartesianas e as polares de um ponto:

$$(x, y) \mapsto (\rho, \theta) : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta : \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\rho} \\ \sin\theta = \frac{y}{\rho} \end{cases} \end{cases} \qquad \text{e} \quad (\rho, \theta) \mapsto (x, y) : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta. \end{cases}$$

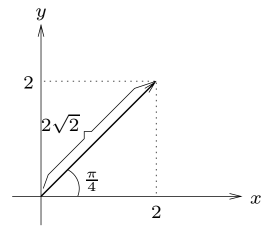
Exemplo 44

Mudança de coordenadas cartesianas para polares:

$$(x, y) = (2, 2) \mapsto (\rho, \theta) = \left(2\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\rho = \sqrt{2^2 + 2^2}, \qquad \theta : \begin{cases} \cos\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

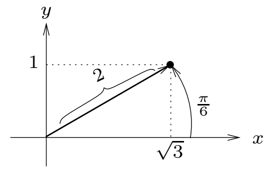
isto é, $\rho = 2\sqrt{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$.



EXEMPLO 45

Mudança de coordenadas polares para cartesianas:

$$(\rho, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{6}\right) \mapsto (x, y) = \left(2\cos\frac{\pi}{6}, \ 2\sin\frac{\pi}{6}\right) = (\sqrt{3}, \ 1).$$



O sistema de coordenadas polares adapta-se particularmente bem à descrição de certos tipos de conjuntos. Por exemplo, o conjunto dos pontos descritos pela equação $x^2+y^2=1$ é descrito em coordenadas polares pela equação $\rho = 1$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$. O conjunto dos pontos descritos pela inequação $x^2 + y^2 \leq 1$ é descrito em coordenadas polares pela inequação $\rho \leq 1$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$.

Quando o domínio de integração D é facilmente descrito com recurso às coordenadas polares (por exemplo no caso de círculos ou sectores circulares, etc. . .) e a função integranda f tem uma expressão simples em coordenadas polares, uma mudança de variáveis para coordenadas simplifica, em geral, o cálculo do integral. Tem-se o seguinte resultado:

> Sejam D' um conjunto elementar descrito em coordenadas polares (ρ, θ) e D o mesmo conjunto descrito em coordenadas cartesianas (x, y).
> Seja f é uma função contínua em D. Então:
>
> $$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_{D'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,d\rho\,d\theta.$$

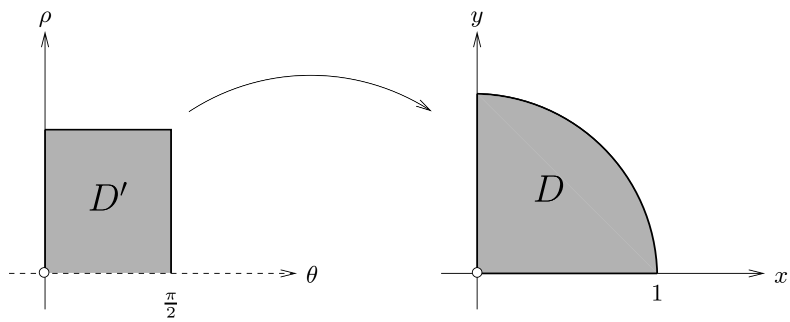
Exemplo 46

Calcular

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx\, dy,$$

onde $D = \Big\{(x,y) \ : \ x,y \geq 0, \quad x^2+y^2 \leq 1\Big\}$. Em coordenadas polares este domínio de integração vem dado por

$$D' = \Big\{(\rho,\theta) \ : \rho \in]0,1], \quad \theta \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big]\Big\}.$$



Fazendo uma mudança de variáveis para coordenadas polares obtemos

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{-x^2-y^2} dx\, dy &= \iint_{D'} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 e^{-\rho^2}(-2\rho) d\rho\right) d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[e^{-\rho^2}\Big]_0^1 d\theta \\
&= -\frac{1}{2}(e^{-1}-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= (1-e^{-1})\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Aplicação do integral duplo ao cálculo de volumes e de áreas

Como vimos atrás, se $f(x,y) \geq 0$ em D, $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ é o volume da região limitada, em D, superiormente pelo gráfico de f e inferiormente por $z=0$.

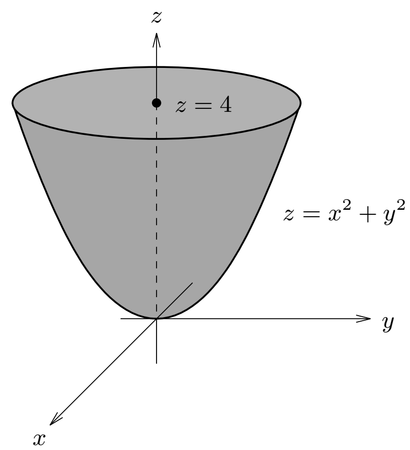
Este resultado generaliza-se (tal como foi feito para o integral definido para o cálculo de áreas): considerando duas funções f e g definidas em D e tais que $f \geq g$ em D,

$$\iint_D (f-g)dxdy,$$

é exactamente o volume da região delimitada, em D, superiormente pelo gráfico de f e inferiormente pelo gráfico de g.

Exemplo 47

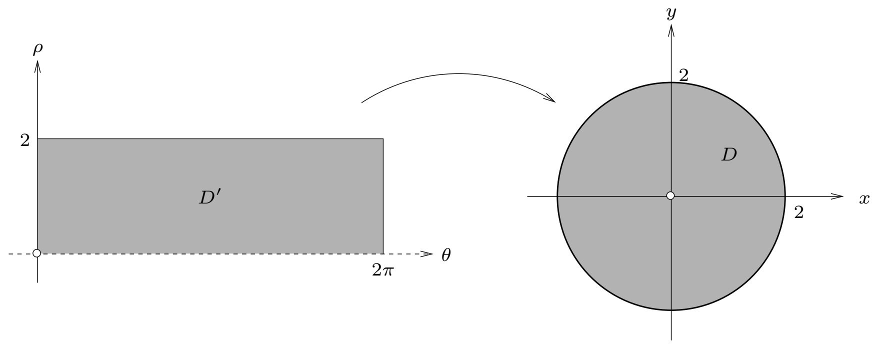
Pretendemos calcular o volume V do sólido limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$.



O volume V está limitado superiormente pela função constante $z = 4$ e inferiormente pela função $z = x^2 + y^2$. A intersecção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ com o plano $z = 4$ define circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Daqui concluímos que a projecção de V no plano $x0y$ é o círculo $D = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Portanto o volume V é dado pelo integral

$$\iint_D (4 - (x^2 + y^2))dx\, dy.$$

Efectuando a mudança de variável para coordenadas polares

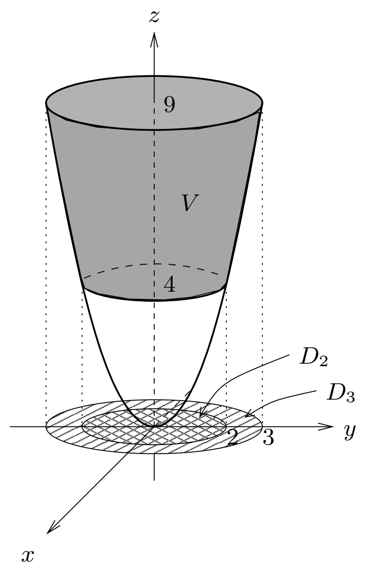


obtemos

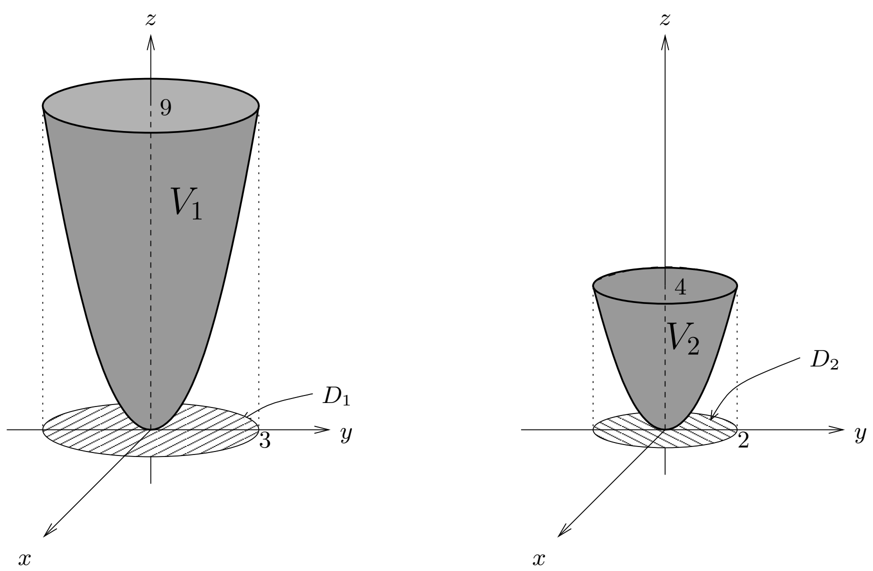
$$
\begin{aligned}
V &= \iint_D (4 - x^2 - y^2) dx\, dy \\
&= \iint_{D'} (4 - \rho^2)\rho d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (4 - \rho^2)\rho\, d\rho \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(8 - \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 \right) d\theta \\
&= 16\pi - 4\,[\theta]_0^{2\pi} = 8\pi.
\end{aligned}
$$

Exemplo 48

Pretende-se determinar o volume do sólido V limitado pelo paraboloide elíptico $z = x^2 + y^2$ e pelos planos $z = 4$ e $z = 9$.



O volume de V obtém-se fazendo a diferença dos volumes dos sólidos V_1 e V_2, sendo V_1 [resp. V_2] limitado superiormente pelo plano $z = 9$ [resp. $z = 4$] e ambos limitados inferiormente pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$.



A intersecção do plano $z = 9$ com o paraboloide elíptico $z = x^2 + y^2$ define a circunferência de raio 3, situada no plano $z = 9$ cujo centro é $(0, 0, 9)$. Daqui resulta que a projecção de V_1 no plano $x0y$ é o círculo centrado na origem de raio 3 que vamos denotar D_1. Analogamemente a projecção do plano $z = 4$ com o paraboloide elíptico $z = x^2 + y^2$

define a circunferência de raio 2, situada no plano $z = 4$ cujo centro é $(0, 0, 4)$ e portanto a projecção de V_2 é disco de raio 2, que vamos notar D_2.

Assim

$$\mathrm{vol}(V) = \iint\limits_{D_1} (9 - (x^2 + y^2))dx\,dy - \iint\limits_{D_2} (4 - (x^2 + y^2))dx\,dy.$$

Efectuando uma mudança de variável para coordenadas polares vem

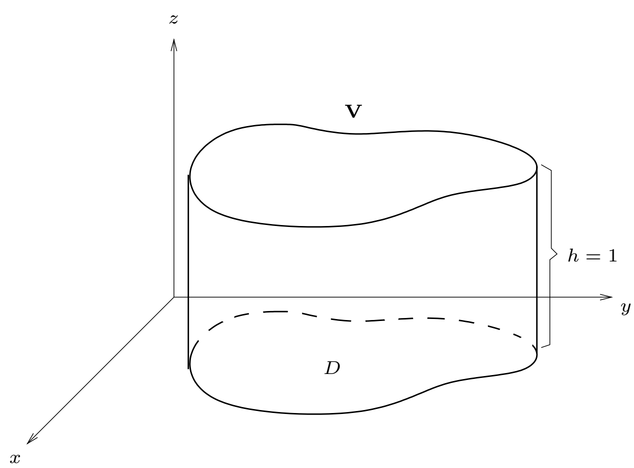
$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{D_3} (9 - (x^2 + y^2))dx\,dy - \iint\limits_{D_2} (4 - (x^2 + y^2))dx\,dy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - \rho^2)\rho d\rho\, d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - \rho^2)\rho d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \left(\left[\frac{9}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^3 - \left[2\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^2 \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4} - 8 + 4 \right) = \frac{65}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Podemos também utilizar o integral duplo para calcular áreas de regiões do plano.

De facto, se calcularmos

$$\iint\limits_{D} 1\, dxdy,$$

estamos a calcular o volume da região V, limitada superiormente por $f(x, y) = 1$ e inferiomente por $z = 0$.



Assim,

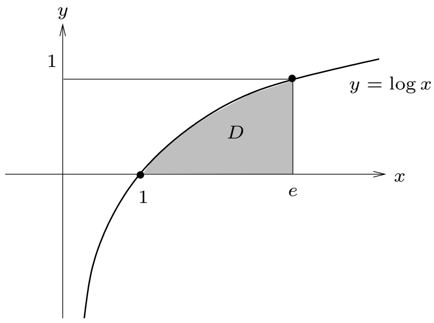
$$\iint\limits_D 1\,dx\,dy \quad = \quad \text{volume de } V \quad = \quad \text{área } D \times \text{altura} \quad = \quad \text{área } D.$$

Exemplo 49

Vejamos como calcular a área do subconjunto

$$D = \{(x,y)\ :\ 1 \leq x \leq e, \quad 0 \leq y \leq \log x\},$$

usando um integral duplo.



Assim teremos

$$\begin{aligned}
\text{Área}(D) \quad &= \quad \iint\limits_D dx\,dy \\
&= \quad \int_1^e \left(\int_0^{\log x} dy \right) dx \\
&= \quad \int_1^e 1 \cdot \log x\, dx \\
&\overset{\text{por partes}}{=} \quad \Big[x \log x \Big]_1^e - \int_1^e x\,\frac{1}{x}\,dx \\
&= \quad e \log e - \log 1 - (e-1) = 1.
\end{aligned}$$

Exercícios 6

1. Calcular:

   (a) $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x+1} dxdy,\ D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 2\}.$

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^1 (x+y)\, dydx.$

   (c) $\displaystyle\int_0^2 \int_{-1}^1 ye^{xy}\, dydx.$

   (d) $\displaystyle\iint_D \cos x \sin y\, dxdy,\ D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

2. Calcule os integrais e represente os domínios de integração:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} dydx.$

   (b) $\displaystyle\int_0^2 \int_{2x}^{3x+1} x\, dydx.$

   (c) $\displaystyle\int_1^e \int_{\ln y}^1 ye^x\, dxdy.$

   (d) $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy,\ D = \{(x,y) : x \ge 0,\ x \le 4 - 4y^2\}.$

   (e) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\, dxdy,\ D = \{(x,y) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ 3x + y \le 9\}.$

3. Considere o quadrado $Q = [-1,1] \times [0,2]$, e a função $f(x,y) = |y - x^2|$. Calcule $\displaystyle\iint_Q f(x,y)\, dxdy.$

4. Inverta a ordem de integração e calcule o integral.

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 (x^2 + y^3 x)\, dxdy.$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} e^{\frac{x}{y}}\, dydx.$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 (x+y)^2\, dxdy.$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \cos\left(\frac{y^3+1}{2}\right) dydx.$

5. Represente a região de integração e inverta a ordem de integração.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dydx.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\, dydx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\, dydx.$

(c) $\displaystyle\int_{1/\sqrt{2}}^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^x f(x,y)\, dy\right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_0^x f(x,y)\, dy\right) dx +$
$\displaystyle + \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\, dy\right) dx.$

6. Calcular volume de $V = \{(x,y,z):\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+z^2 \leq 1,\ x+y \leq 2\}$.

7. Calcule o volume do sólido limitado pelos parabolóides $4-z = x^2+y^2$ e $9-3z = x^2+y^2$.

8. Calcular o volume limitado pelo parabolóide $z = 2x^2+y^2$ e a superfície cilíndrica $z = 4-y^2$.

9. Calcule a área de $D = \{(x,y):\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$.