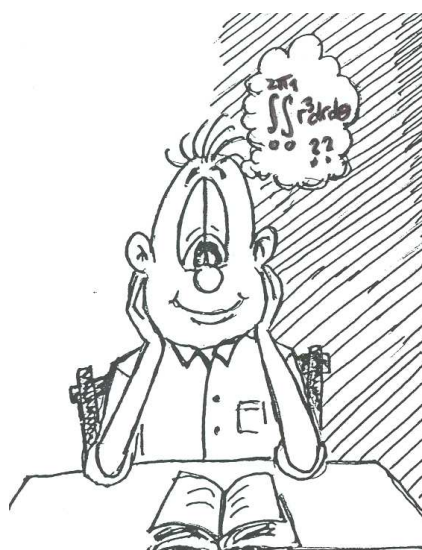


Matemática e Informática

TÓPICOS DE CÁLCULO PARA FUNÇÕES DE VÁRIAS

VARIÁVEIS (SOLUÇÕES)



INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

- 2007 -

Domínio, curva de nível e gráfico. Superfícies quádricas.

Continuidade

EXERCÍCIOS 1

1. Determine o domínio das seguintes funções e represente-o geometricamente:

(a) $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

Solução: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$.

(b) $f(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) - \sqrt{1-x}$.

Solução: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (0 < x \leq 1 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\}$.

(c) $f(x, y) = \frac{\ln(3-x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

Solução: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 3 \wedge (x, y) \neq (0, 0)\}$.

(d) $f(x, y) = \frac{x}{y-1}$.

Solução: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 1\}$.

(e) $f(x, y) = \sqrt{x(y-x^2)}$.

Solução: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \wedge y \geq x^2) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq x^2)\}$.

(f) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy+1}}$.

Solução: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)\}$.

2. Identifique os conjuntos de nível e esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = 3$.

Solução: $C_k = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & , k = 3 \\ \emptyset & , k \neq 3; \end{cases}$
 $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3\}$ (plano $z = 3$).

(b) $f(x, y) = x$.

Solução: $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = k\}$, $k \in \mathbb{R}$;
 $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x\}$ (plano $z = x$).

(c) $f(x, y) = x^2$.

Solução: $C_k = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} & , k = 0 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \sqrt{k} \vee x = -\sqrt{k}\} & , k > 0 \\ \emptyset & , k < 0; \end{cases}$
 $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2\}$ (cilindro parabólico, cuja intersecção com qualquer plano $y = b$ é a parábola $z = x^2$).

(d) $f(x, y) = |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0. \end{cases}$

Solução: $C_k = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} & , k = 0 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = k \vee x = -k\} & , k > 0 \\ \emptyset & , k < 0; \end{cases}$
 $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z = x \wedge x \geq 0) \vee (z = -x \wedge x < 0)\}$ (reunião dos dois semi-planos $z = x \wedge x \geq 0$ e $z = -x \wedge x < 0$).

(e) $f(x, y) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\text{Solução: } C_k = \begin{cases} \{(0, 0)\} & , k = 0 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k^2\} & , k > 0 \\ \emptyset & , k < 0; \end{cases}$$

$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$ ($z^2 = x^2 + y^2 \wedge z \geq 0$, semi-cone superior com o vértice em $(0,0,0)$ e orientado segundo o eixo dos zz).

(f) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

$$\text{Solução: } C_k = \begin{cases} \{(0, 0)\} & , k = 0 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k\} & , k > 0 \\ \emptyset & , k < 0; \end{cases}$$

$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ (paraboloide elíptico com o vértice em $(0,0,0)$ e orientado segundo o semi-eixo positivo dos zz).

(g) $f(x, y) = e^{-x^2-2y^2}$.

$$\text{Solução: } C_k = \begin{cases} \{(0, 0)\} & , k = 1 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{-\ln k} + \frac{y^2}{(-\ln k)/2} = 1\} & , 0 < k < 1 \\ \emptyset & , k \leq 0 \vee k > 1; \end{cases}$$

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = e^{-x^2-2y^2}\}.$$

3. Relativamente a cada uma das funções indicadas nas alíneas (f) e (g) do exercício anterior:

(a) Defina a curva de nível que passa no ponto $(1, 1)$.

Solução: (f) $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$;

(g) $C_{e^{-3}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3/2} = 1\}$.

(b) Diga, justificando, se o ponto $(1, 1, 1)$ pertence ao respectivo gráfico.

Solução: Não, pois $f(1, 1) \neq 1$ em ambos os casos.

(c) Determine o respectivo contradomínio.

Solução: (f) $CD = [0, +\infty[$; (g) $CD =]0, 1]$.

4. Defina analítica e geometricamente as curvas de nível para as seguintes funções, indicando em cada caso o respectivo domínio:

(a) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x}{x+y}}$.

Solução: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \wedge y > -x) \vee (x \leq 0 \wedge y < -x)\}$;

$$C_k = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \setminus \{(0, 0)\} & , k = 0 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1-k^2}{k^2} x\} \setminus \{(0, 0)\} & , k > 0 \\ \emptyset & , k \leq 0; \end{cases}$$

C_0 é o eixo dos yy excepto o ponto $(0,0)$. Quando $k > 0$, C_k é a recta $y = \frac{1-k^2}{k^2} x$ excepto o ponto $(0,0)$.

(b) $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$.

Solução: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$;

$$C_k = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \wedge y \neq 0\} & , k = 0 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{k} x^2 \wedge y \neq 0\} & , k \neq 0; \end{cases}$$

C_0 é o eixo dos yy excepto o ponto $(0,0)$. Quando $k \neq 0$, C_k é a parábola $y = \frac{1}{k} x^2$ excepto o ponto $(0,0)$.

5. Identifique analítica e geometricamente os conjuntos de nível das seguintes funções:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$$\text{Solução: } C_k = \begin{cases} \{(0, 0, 0)\} & , k = 0 \\ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k\} & , k > 0 \\ \emptyset & , k < 0; \end{cases}$$

Quando $k > 0$, C_k é a esfera centrada em $(0, 0, 0)$ e de raio \sqrt{k} .

(b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

$$\text{Solução: } C_k = \begin{cases} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \wedge y = 0\} & , k = 0 \\ \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = k\} & , k > 0 \\ \emptyset & , k < 0; \end{cases}$$

C_0 é o eixo dos zz . Quando $k > 0$, C_k é o cilindro elíptico cuja intersecção com qualquer plano $z = c$ é a circunferência centrada em $(0, 0, c)$ e de raio \sqrt{k} .

(c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$.

Solução: $C_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z + k\}$, $k \in \mathbb{R}$, é um parabolóide elíptico com o vértice em $(0, 0, -k)$ e orientado segundo o semi-eixo positivo dos zz .

6. Determine uma função para a qual:

(a) $y = 3x + 4$ é uma curva de nível.

Solução: $y = 3x + 4$ é, por exemplo, a curva de nível 4 de $f(x, y) = y - 3x$.

(b) $x^2 - y = 1$ é uma curva de nível.

Solução: $x^2 - y = 1$ é, por exemplo, a curva de nível 0 de $f(x, y) = x^2 - y - 1$.

(c) $x^2 - y = 1$ é uma superfície de nível.

Solução: $x^2 - y = 1$ é, por exemplo, a superfície de nível 0 de $f(x, y, z) = x^2 - y - 1$.

(d) $x^2 + y^2 = 4$ é uma superfície de nível.

Solução: $x^2 + y^2 = 4$ é, por exemplo, a superfície de nível 4 de $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

7. Identifique as quádricas:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 12 = 0$.

Solução: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 1$. Esfera centrada em $(3, -2, 0)$ e de raio 1.

(b) $z = \sqrt{25 - (x - 2)^2 - (y - 3)^2}$.

Solução: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 5^2 \wedge z \geq 0$. Semi-esfera superior centrada em $(2, 3, 0)$ e de raio 5.

(c) $z = 3 + \sqrt{25 - (x - 2)^2 - (y - 3)^2}$.

Solução: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 5^2 \wedge z \geq 3$. Semi-esfera superior centrada em $(2, 3, 3)$ e de raio 5.

(d) $z = x^2 + 4y^2 + 7$.

Solução: $x^2 + \frac{y^2}{1/4} = z - 7$. Parabolóide elíptico orientado segundo o semi-eixo positivo dos z com o vértice em $(0, 0, 7)$.

(e) $4x = y^2 + z^2$.

Solução: $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = x$. Parabolóide elíptico orientado segundo o semi-eixo positivo dos xx com o vértice em $(0,0,0)$.

(f) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$.

Solução: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$. Elipsoide centrado em $(0,0,0)$ e de semi-eixos 6 (xx), 3 (yy) e 2 (zz).

(g) $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$.

Solução: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$. Hiperbolóide elíptico de uma folha orientado segundo o eixo dos zz .

(h) $9x^2 - 16y^2 + 4z^2 = 64$.

Solução: $\frac{x^2}{64/9} + \frac{z^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. Hiperbolóide elíptico de uma folha orientado segundo o eixo dos yy .

(i) $4x = y^2 - 2z^2$.

Solução: $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = x$. Parabolóide hiperbólico cuja intersecção com o plano $y = 0$ é a parábola $x = -\frac{z^2}{2}$.

(j) $4x^2 - y^2 + 16z^2 = 0$.

Solução: $\frac{x^2}{1/4} + \frac{z^2}{1/16} - y^2 = 0$. Cone com vértice em $(0,0,0)$ orientado segundo o eixo dos yy .

(k) $4x^2 - y^2 - 16z^2 = 0$.

Solução: $y^2 + \frac{z^2}{1/16} - \frac{x^2}{1/4} = 0$. Cone com vértice em $(0,0,0)$ orientado segundo

o eixo dos xx .

(l) $4x^2 + y^2 = 4$.

Solução: $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$. Cilindro elíptico cuja intersecção com qualquer plano $z = c$ é a elipse centrada em $(0, 0, c)$ e de semi-eixos 1 (xx) e 2 (yy).

(m) $x^2 - y^2 = 25$.

Solução: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$. Cilindro hiperbólico cuja intersecção com qualquer plano $z = c$ é a hipérbole $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$.

(n) $x^2 + y^2 = 25$.

Solução: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} = 1$. Cilindro elíptico cuja intersecção com qualquer plano $z = c$ é a circunferência centrada em $(0, 0, c)$ e de raio 5.

(o) $y^2 - 4x = 0$.

Solução: Cilindro parabólico cuja intersecção com qualquer plano $z = c$ é a parábola $x = \frac{y^2}{4}$.

(p) $xy = 6$.

Solução: Cilindro hiperbólico cuja intersecção com qualquer plano $z = c$ é a hipérbole $xy = 6$.

8. Escreva a equação de

(a) Cone cujo vértice é a origem e cuja intersecção com o plano $z = 1$ é $x^2 + y^2 = 4$.

Solução: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = z^2$.

(b) Esfera de centro $(-2, 1, 0)$ e raio 2.

Solução: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 2^2$.

(c) Elipsoide de centro $(0, 0, 1)$ e semi-eixos, 2, -1, 4.

Solução: $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{(z-1)^2}{16} = 1$.

Derivadas parciais. Plano tangente

EXERCÍCIOS 2

1. Determine as derivadas parciais de 1ª ordem das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = x^3 y - 2x y^2 + x^4$.

Solução: $f'_x(x, y) = 3x^2 y - 2y^2 + 4x^3$; $f'_y(x, y) = x^3 - 4xy$.

(b) $f(x, y) = 2x \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

Solução: $f'_x(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$; $f'_y(x, y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$.

(c) $f(x, y) = x^3 + \cos(x + 3y)$.

Solução: $f'_x(x, y) = 3x^2 - \sin(x + 3y)$; $f'_y(x, y) = -3 \sin(x + 3y)$.

(d) $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$.

Solução: $f'_x(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$; $f'_y(x, y) = e^{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$.

(e) $f(x, y) = e^{-y^2} \cos(x^2 + y^2)$.

Solução: $f'_x(x, y) = -2xe^{-y^2} \sin(x^2 + y^2)$; $f'_y(x, y) = -2ye^{-y^2} (\cos(x^2 + y^2) + \sin(x^2 + y^2))$.

(f) $f(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y^2}\right)$.

Solução: $f'_x(x, y) = \frac{1}{x}$; $f'_y(x, y) = -\frac{2}{y}$.

(g) $f(x, y, z) = (2x - y + z)e^{x-y}$.

Solução: $f'_x(x, y, z) = e^{x-y}(2 + 2x - y + z)$; $f'_y(x, y, z) = -e^{x-y}(1 + 2x - y + z)$; $f'_z(x, y, z) = e^{x-y}$.

2. Considere a função $f(x, y) = \frac{x}{y}$.

Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

Solução: $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \frac{1}{2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = -\frac{1}{4}$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, 0) = x^2$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $f(1, y) = y + e^{-y}$ para todo o $y \in \mathbb{R}$.

Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$.

Solução: $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 2$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0$.

4. Indique uma equação do plano tangente ao gráfico de:

(a) $f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2 + 1}$ em $(1, 3, f(1, 3))$.

Solução: $\frac{15}{121}(x - 1) + \frac{1}{121}(y - 3) - (z + \frac{2}{11}) = 0$.

(b) $f(x, y) = x^3 - xy + e^y$ em $(-1, 0, 0)$.

Solução: $3(x + 1) + 2y - z = 0$.

(c) $f(x, y) = \sin(3x + ye^x)$ em $(0, 0, f(0, 0))$.

Solução: $3x + y - z = 0$.

5. Calcule as derivadas parciais até à 2ª ordem e indique as matrizes Jacobiana e Hessiana de:

(a) $f(x, y) = x$.

Solução: $J(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$; $H(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $f(x, y) = x^2 + y \ln x$.

Solução: $J(x, y) = \begin{bmatrix} 2x + \frac{y}{x} & \ln x \end{bmatrix}$; $H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 - \frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $f(x, y, z) = \ln(x + y^2 + z^2)$.

Solução: $J(x, y) = \frac{1}{x+y^2+z^2} \begin{bmatrix} 1 & 2y & 2z \end{bmatrix}$;
 $H(x, y, z) = \frac{1}{(x+y^2+z^2)^2} \begin{bmatrix} -1 & -2y & -2z \\ -2y & 2x - 2y^2 + 2z^2 & -4yz \\ -2z & -4yz & 2 + 2y^2 - 2z^2 \end{bmatrix}$.

(d) $f(x, y) = \|(x, y)\|$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Solução: $J(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$;
 $H(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \begin{bmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{bmatrix}$.

(e) $f(x, y) = x \|(x, y)\|$ em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Solução: $J(x, y) = \left[\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right];$

$$H(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} 2x^3 + 3xy^2 & y^3 \\ y^3 & x^3 \end{bmatrix}.$$

Derivadas direccionais e gradiente

EXERCÍCIOS 3

1. Seja $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$.

(a) Calcule $f'_{\vec{u}}(1, 1)$ para os vectores $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Solução: $f'_x(1, 1) = -2$; para $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f'_{\vec{u}}(1, 1) = -2\sqrt{2}$.

(b) Mostre que $f'_{\vec{u}}(0, 0) = 0$ qualquer que seja $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\|\vec{u}\| = 1$.

Solução: Uma vez que f tem derivadas parciais contínuas,
 $f'_{\vec{u}}(0, 0) = \text{grad } f(0, 0) \cdot (u_1, u_2) = (0, 0) \cdot (u_1, u_2) = 0$, $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2$, $\|\vec{u}\| = 1$.

(c) Escreva a equação da recta tangente à curva de nível 3 de f em $(0, 1)$.

Solução: $y = 1$.

2. Considere $f(x, y) = x^2y + y^3x$.

(a) Qual a taxa de variação instantânea de f no ponto $(1, 1)$ na direcção do eixo dos xx ?

Solução: $f'_x(1, 1) = 3$.

- (b) Qual a taxa de variação instantânea de f no ponto $(1, 1)$ segundo a direcção do vector $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$?

Solução: $f'_{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})}(1, 1) = \frac{7}{\sqrt{2}}$.

- (c) Determine a direcção para a qual a derivada direccional de f em $(1, 1)$ é nula.

Solução: A direcção do vector $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ (ou $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$).

- (d) Em que direcção se deve deslocar a partir do ponto $(1, 1)$ para obter a maior taxa de variação instantânea de f ?

Solução: Na direcção do vector $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

3. As afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas? Justifique convenientemente a resposta.

- (a) $f'_v(a, b)$ é um escalar para $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$.

Solução: Verdadeira. Ver definição de derivada direccional.

- (b) Existe uma direcção $v \in \mathbb{R}^2$, com $\|v\| = 1$, tal que $f'_v(a, b) = 0$.

Solução: Verdadeira.

$v = (f'_y(a, b), -f'_x(a, b))/\|grad f(a, b)\|$ ou $v = (-f'_y(a, b), f'_x(a, b))/\|grad f(a, b)\|$, supondo que f tem derivadas parciais contínuas em todos os pontos perto de (a, b) .

- (c) Existe um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tal que $\|grad f(a, b)\| = 4$, $f'_{(1,0)}(a, b) = 5$.

Solução: Falsa.

Se $f'_x(a, b) = 5$ então $\|grad f(a, b)\| = \sqrt{(f'_x(a, b))^2 + (f'_y(a, b))^2} > 5$.

(d) Existe $v \in \mathbb{R}^2$ com $\|v\| = 1$ tal que $f'_v(a, b) = \|grad f(a, b)\|$.

Solução: Verdadeira.

$v = (f'_x(a, b), f'_y(a, b)) / \|grad f(a, b)\|$, supondo que f tem derivadas parciais contínuas em todos os pontos perto de (a, b) .

4. Determine a equação da recta tangente às curvas seguintes, nos pontos indicados:

(a) $x^2 + y^2 = 4$, $P_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Solução: $2\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(y - \sqrt{2}) = 0$.

(b) $x^2 + xy + y^2 = 7$, $P_0 = (1, 2)$.

Solução: $4(x - 1) + 5(y - 2) = 0$.

5. Determine uma equação do plano tangente às superfícies seguintes, nos pontos P_0 indicados:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $P_0 = (1, 1, 1)$.

Solução: $2(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 1) = 0$.

(b) $2z - x^2 = 0$, $P_0 = (2, 4, 2)$.

Solução: $-2(x - 2) + z - 2 = 0$.

(c) $z = 3 - 2x^2 - y^2$, $P_0 = (1, -1, 0)$.

Solução: $4(x - 1) - 2(y + 1) + z = 0$.

6. Determine os pontos da superfície $xy + yz + zx - x - z^2 = 0$ onde o plano tangente é paralelo ao plano XOY .

Solução: $(0, 1, 0)$ e $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

7. Determine um vector unitário perpendicular à superfície

$$2x^3 + xz = 1$$

no ponto $P_0 = (1, 2, -1)$ e a equação do plano tangente à superfície referida, no ponto P_0 .

Solução: $(\frac{5}{\sqrt{26}}, 0, \frac{1}{\sqrt{26}})$; $5(x - 1) + z = -1$.

8. Seja $f(x, y, z) = xy + yz + zx$. Escreva a equação da superfície de nível de f que contém o ponto $P_0 = (1, 1, 0)$ e determine a equação do plano tangente a esta superfície em P_0 .

Solução: $xy + yz + zx = 1$; $x + y + 2z = 2$.

Extremos livres

EXERCÍCIOS 4

1. Determine os pontos críticos das seguintes funções e estude a sua natureza:

(a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Solução: $(0, 0)$ é um ponto de sela e $f(1, 1) = f(-1, -1) = -2$ são mínimos.

(b) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 8x^2y^2 + 12x^3$.

Solução: $(0,0)$ é um ponto de sela e $f(-9, 0) = -2187$ é um mínimo.

(c) $f(x, y) = (x - 1)(3 - x)y^3 - y$.

Solução: $(2, \frac{1}{\sqrt{3}})$ e $(2, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ são pontos de sela.

(d) $f(x, y) = x + y + 1/x + 4/y$.

Solução: $(1,-2)$ e $(-1,2)$ são pontos de sela, $f(1,2) = 6$ é um mínimo e $f(-1, -2) = -6$ é um máximo.

(e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$.

Solução: $(0,0)$ é um ponto de sela, $f(-1,1) = -2$ e $f(1,-1) = -2$ são mínimos.

2. Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 + ay^2$, com $-1 \leq a \leq 1$.

(a) Analise, para os diferentes valores de a , a existência de extremos locais da função f .

Solução: Para $a > 0$, $f(0,0) = 0$ é um mínimo; para $a < 0$, $(0,0)$ é um ponto de sela; para $a = 0$, $f(0, y) = 0$ é um mínimo qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$.

(b) Interprete geometricamente o problema.

Solução: O gráfico de f é: para $a > 0$, o parabolóide elíptico $z = x^2 + \frac{y^2}{1/a}$ com o vértice em $(0,0,0)$ e orientado segundo o semi-eixo positivo dos z ; para $a < 0$, o

parabolóide hiperbólico $z = x^2 - \frac{y^2}{1/a}$; para $a = 0$, o cilindro parabólico $z = x^2$.

3. Seja $f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$, em que k é uma constante.

(a) Mostre que f admite um ponto crítico em $(0, 0)$ independente do valor de k .

Solução: $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.

(b) Para que valores de k o ponto $(0, 0)$ é um ponto de sela? Justifique a resposta.

Solução: Para $k < -2 \vee k > 2$, porque $\det H_f(0, 0) < 0$ ($f(0, 0)$ é mínimo para os restantes valores de k).

4. Calcule, justificando convenientemente, os valores de a , b e c para que

$$f(x, y) = a - (x^2 + bx + y^2 + cy)$$

tenha um máximo de valor 15 no ponto $(-2, 1)$.

Solução: A solução do sistema
$$\begin{cases} f'_x(-2, 1) = 0 \\ f'_y(-2, 1) = 0 \\ f(-2, 1) = 15 \end{cases}$$
 é $a = 10, b = 4, c = -2$.

5. Prove que $(1, 1, 1)$ é um ponto crítico de $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ e determine a sua natureza.

Solução: $f'_x(1, 1, 1) = f'_y(1, 1, 1) = f'_z(1, 1, 1) = 0$; $f(1, 1, 1)$ é um mínimo.

Extremos condicionados

EXERCÍCIOS 5

1. Determine o maior e o menor dos valores de $f(x, y) = xy$ sobre a elipse de equação $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Solução: $f(2, 1) = f(-2, -1) = 2$ são máximos e $f(-2, 1) = f(2, -1) = -2$ são mínimos.

2. De entre todas as caixas paralelepípedicas de área total 10 m^2 , pretende-se determinar a de maior volume.

Solução: Max. $f(x, y, z) = xyz$ s.a. $2(xy + yz + xz) - 10 = 0$: a de maior volume corresponde a $(x, y, z) = (\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}})$.

3. Maximizar a função $f(x, y, z) = x + z$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solução: $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$ é máximo e $f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$ é mínimo.

4. Determine o ponto da superfície $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ mais próximo do ponto $(2, 0, 1)$.

Solução: $(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2})$.

Integrais duplos

EXERCÍCIOS 6

1. Calcular:

(a) $\iint_D \frac{y}{x+1} dx dy$, $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2\}$.

Solução: $\frac{3}{2} \ln 2$.

$$(b) \int_1^2 \int_0^1 (x+y) dy dx.$$

Solução: 2.

$$(c) \int_0^2 \int_{-1}^1 ye^{xy} dy dx.$$

Solução: $\frac{1}{2}(e^2 - \frac{1}{e^2}) - 2$.

$$(d) \iint_D \cos x \sin y dx dy, D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Solução: 1.

2. Calcule os integrais e represente os domínios de integração:

$$(a) \int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx.$$

Solução: $\frac{1}{3}$.

$$(b) \int_0^2 \int_{2x}^{3x+1} x dy dx.$$

Solução: $\frac{14}{3}$.

$$(c) \int_1^e \int_{\ln y}^1 ye^x dx dy.$$

Solução: $\frac{e^3}{6} - \frac{e}{2} + \frac{1}{3}$.

$$(d) \iint_D xy dx dy, D = \{(x, y) : x \geq 0, x \leq 4 - 4y^2\}.$$

Solução: 0.

$$(e) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 3x + y \leq 9\}.$$

Solução: $\frac{405}{2}$.

3. Considere o quadrado $Q = [-1, 1] \times [0, 2]$, e a função $f(x, y) = |y - x^2|$. Calcule $\iint_Q f(x, y) dx dy$.

Solução: $\int_{-1}^0 \int_0^{x^2} -y + x^2 dy dx + \int_{-1}^0 \int_{x^2}^2 y - x^2 dy dx + \int_0^1 \int_0^{x^2} -y + x^2 dy dx + \int_0^1 \int_{x^2}^2 y - x^2 dy dx = \frac{46}{15}$.

4. Inverta a ordem de integração e calcule o integral.

(a) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 (x^2 + y^3 x) dx dy$.

Solução: $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + y^3 x) dy dx = \frac{9}{40}$.

(b) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} e^{\frac{x}{y}} dy dx$.

Solução: $\int_0^1 \int_{y^2}^y e^{\frac{x}{y}} dx dy = \frac{e}{2} - 1$.

(c) $\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 (x + y)^2 dx dy$.

Solução: $\int_0^1 \int_0^{2x} (x + y)^2 dy dx = \frac{13}{6}$.

(d) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \cos\left(\frac{y^3 + 1}{2}\right) dy dx$.

Solução: $\int_0^1 \int_0^{y^2} \cos\left(\frac{y^3 + 1}{2}\right) dx dy = \frac{2}{3} \left(\sin(1) - \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right)$.

5. Represente a região de integração e inverta a ordem de integração.

$$(a) \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx.$$

Solução: $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy.$

$$(b) \int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y) dy dx.$$

Solução: $\int_0^1 \int_y^{2-y} f(x, y) dx dy.$

$$(c) \int_{1/\sqrt{2}}^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^x f(x, y) dy \right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_0^x f(x, y) dy \right) dx + \\ + \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right) dx.$$

Solução: $\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx dy.$

6. Calcular volume de $V = \{(x, y, z) : y \geq 0, z \geq 0, x^2 + z^2 \leq 1, x + y \leq 2\}$.

Solução: π .

7. Calcule o volume do sólido limitado pelos parabolóides $4 - z = x^2 + y^2$ e $9 - 3z = x^2 + y^2$.

Solução: $\frac{3}{4}\pi$.

8. Calcular o volume limitado pelo parabolóide $z = 2x^2 + y^2$ e a superfície cilíndrica $z = 4 - y^2$.

Solução: 4π .

9. Calcule a área de $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Solução: 8π .