

# Matemática e Informática

## MATRIZES E VECTORES



INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

- 2008 -



---

Nestes apontamentos expõe-se a matéria que vai ocupar o 1º dos 4 módulos da unidade curricular *Matemática e Informática*, do 1º ano de todas as licenciaturas adaptadas a Bolonha, do Instituto Superior de Agronomia.

Jorge Orestes Cerdeira  
ISA, Setembro 2008

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Cálculo matricial</b>	<b>3</b>
1.1	Sistemas de equações lineares . . . . .	3
1.2	Matrizes e vectores . . . . .	15
1.3	Operações com matrizes . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Introdução à programação linear</b>	<b>35</b>
<b>3</b>	<b>Norma, produto interno e ângulo de vectores</b>	<b>57</b>
<b>4</b>	<b>Valores e vectores próprios</b>	<b>65</b>
4.1	Determinantes . . . . .	65
4.2	Vectores e valores próprios . . . . .	70

## CONTEÚDO

---

# Capítulo 1

## Cálculo matricial

As matrizes são objectos matemáticos que ocorrem em inúmeras situações. Neste capítulo vamos introduzir a noção de matriz de elementos reais e definir operações básicas com matrizes. Começamos por estudar os sistemas de equações lineares com várias variáveis.

### 1.1 Sistemas de equações lineares

Vamos recordar as noções de equação linear, sistema de equações lineares e resolução de um sistema de equações e introduzir um método para classificar e resolver sistemas de equações lineares que nos vai ajudar na interpretação geométrica do sistema.

#### EXEMPLOS 1

1. A equação  $3x - y = 1$  é linear com duas variáveis. Os pontos  $(x, y)$  do plano que a satisfazem definem a recta perpendicular ao vector  $(3, -1)$  e que inclui o ponto  $(0, -1)$ .
2. A equação  $x - y + 5z = 0$  é linear com três variáveis. Os pontos  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  que a satisfazem definem um plano perpendicular ao vector  $(1, -1, 5)$  e que passa na origem do sistema de eixos.

## 1.1. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

---

Uma *equação linear* com  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é uma equação que pode ser escrita na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

com  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , não todos nulos, e  $b$  números reais. Diz-se que  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as variáveis ou incógnitas,  $a_i$  é o coeficiente da variável  $x_i$  e  $b$  é membro direito ou termo constante.

### EXEMPLOS 2

1. As equações  $x + 8y - 4z + 3t = 12$  e  $x_1 - 3x_2 + 5x_4 = \frac{5}{2}$  são exemplos de equações lineares com quatro variáveis.
2. As equações  $x^2 - 2xy + 3y = 1$ ,  $x_1 - \frac{1}{x_2} + x_3 = 0$ ,  $e^{x_1} - x_2 = \frac{1}{2}$  são exemplos de equações não lineares.

Uma *solução* de uma equação é uma sequência de valores que atribuídos às variáveis transforma a equação numa proposição verdadeira. Assim,  $(0, 0, 1)$  e  $(-\frac{1}{2}, 1, 1)$  são soluções da equação  $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$ .

Resolver uma equação é determinar o conjunto das soluções. Para resolver a equação

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

podemos escolher duas variáveis para tomarem valores arbitrários (variáveis livres) e resolver a equação em ordem à variável restante (variável dependente). O conjunto das soluções é pois o plano definido por

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1, x_2, x_3) : \quad x_1 = \forall \\ \quad \quad \quad \quad x_2 = 1 - 2x_1 - x_3 \\ \quad \quad \quad \quad x_3 = \forall \end{array} \right\}.$$

**OBSERVAÇÃO 1** Se uma equação linear tem uma única variável, não há variáveis livres, o conjunto de soluções é singular e consiste num único ponto de  $\mathbb{R}$ . Se é uma equação

linear com duas variável, tem uma variável livre e o conjunto de soluções define uma recta em  $\mathbb{R}^2$ . Com três variáveis, há duas variáveis livres e define um plano de  $\mathbb{R}^3$ . Quando a equação tem  $n > 3$  variáveis, existem  $n - 1$  variáveis livres e diz-se que o conjunto das soluções é um *hiperplano* de  $\mathbb{R}^n$ .

Um *sistema de equações lineares* é uma colecção finita de equações lineares com as mesmas variáveis. O sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

tem  $m$  equações e  $n$  variáveis. Diz-se do tipo  $m$  por  $n$  e escreve-se  $m \times n$ . Diz-se também que  $a_{ij}$  é o coeficiente da variável  $j$  na equação  $i$  e que  $b_i$  é o membro direito da equação  $i$ .

Uma *solução* do sistema é uma solução comum às  $m$  equações.

EXEMPLO 3  $(-2, 0, 6)$  e  $(2, 1, 1)$  são soluções do sistema de equações lineares  $2 \times 3$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

$(1, 1, 2)$  não é solução.

Se o sistema admite uma única solução diz-se *determinado*. É *indeterminado* se tem mais do que uma solução. Se não existem soluções o sistema diz-se *impossível*.

#### EXERCÍCIOS 1

1. Para que valores de  $b$  o sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 4x_1 + 6x_2 &= b \end{aligned}$$

é impossível?

## 1.1. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

---

2. Indique uma equação a juntar a

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 4$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$

de forma a obter um sistema impossível.

Dois sistemas são *equivalentes* se têm as mesmas soluções. Se num sistema de equações

1. adicionar a uma equação um múltiplo de outra,
2. multiplicar uma equação por uma constante não nula, ou
3. trocar duas equações,

obtem um sistema equivalente. As *operações* 1, 2 e 3 chamam-se *elementares*.

EXEMPLO 4 Os sistemas

$$A = \begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{1}{2}x + y = 2 \end{cases} \text{ e } B = \begin{cases} x - y = 1 \\ -\frac{1}{2}x + 2y = 1 \end{cases},$$

representados geometricamente na Figura 1.1 a) e b), respectivamente, são equivalentes.

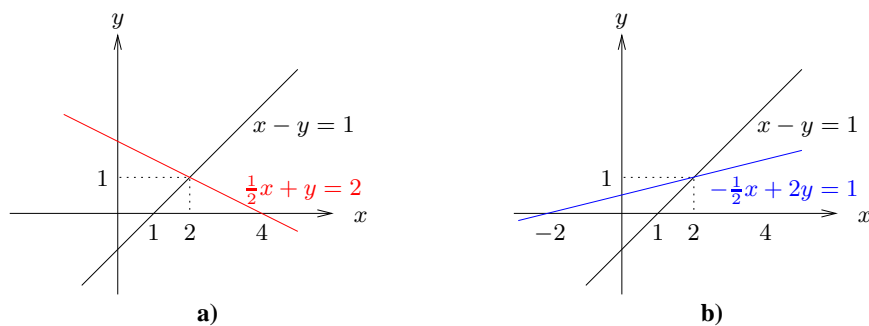


Figura 1.1: Representação das equações dos sistemas: a)  $A$  e b)  $B$  do Exemplo 4.

Note que a 2ª equação do sistema  $B$  obtem-se adicionando à 2ª equação de  $A$  a 1ª multiplicada por  $-1$ .

*Resolver* um sistema é determinar o conjunto das soluções. (O conjunto de soluções de um sistema impossível é vazio.) Para resolver um sistema identificam-se, caso existam, variáveis que podem tomar valores arbitrários (*variáveis livres*) e exprime-se, em função dessas variáveis, cada uma das restantes (*variáveis dependentes*).

O método de eliminação de Gauss resolve sistemas de equações lineares por aplicação sucessiva das operações elementares. O método decorre em duas fases. A fase descendente termina com um sistema em escada equivalente ao inicial. Num *sistema em escada* o 1º coeficiente não nulo de cada equação "está mais à direita" do que o 1º coeficiente não nulo da equação anterior.

EXEMPLO 5

$$S' = \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 34 \\ -7x_3 - 4x_4 - 7x_5 = -76 \\ 6x_4 = 30 \end{cases}$$

é um sistema em escada.

O sistema em escada  $S'$  do Exemplo 5 é equivalente ao sistema

$$S = \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 34 \\ 2x_1 - 6x_2 - x_3 - 2x_4 - 5x_5 = -8 \\ 3x_1 - 9x_2 - 5x_3 + x_4 - 11x_5 = -20 \end{cases}$$

que vamos usar para ilustrar a descrição do método de eliminação de Gauss.

O método começa por utilizar a 1ª equação para "eliminar" a 1ª variável nas restantes equações, executando para este efeito operações elementares do tipo 1. Para eliminar a variável  $x_1$  nas equações 2 e 3 de  $S$  substituem-se a equação 2 pela sua soma com -2 vezes a equação 1 e a equação 3 pela sua soma com -3 vezes a equação 1. Obtem-se assim o sistema

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 34 \\ -7x_3 - 4x_4 - 7x_5 = -76 \\ -14x_3 - 2x_4 - 14x_5 = -122 \end{cases}$$

que é equivalente a  $S$  e em que a variável  $x_1$  "não figura" nas equações 2 e 3.

Este procedimento é agora repetido com o sistema que resulta de ignorar a 1ª equação do sistema obtido na iteração anterior. Com o sistema anterior o procedimento conduz ao sistema em escada

$$S' = \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 34 \\ -7x_3 - 4x_4 - 7x_5 = -76, \\ 6x_4 = 30 \end{cases}$$

ficando assim concluída a fase descendente do método de Gauss.

Uma vez obtido um sistema em escada equivalente ao inicial, as variáveis livres e as dependentes são identificadas pelas posições dos *pivots*. Os *pivots* de um sistema em escada são os primeiros coeficiente não nulos das equações. As correspondentes variáveis chamam-se *variáveis pivot*. Os *pivots* do sistema  $S'$  são 1, -7, 6 e  $x_1, x_3, x_4$  são as variáveis *pivot*. As variáveis *pivot* vão ser seleccionadas para dependentes e as restantes para variáveis livres.

A fase ascendente do método de eliminação de Gauss começa com o sistema em escada determinado na fase descendente e termina com a obtenção de um sistema reduzido equivalente. Um *sistema reduzido* é um sistema em escada com todos os *pivots* iguais a 1 e em que cada equação não inclui mais do que uma variável *pivot*.

EXEMPLO 6

$$R = \begin{cases} x_1 - 3x_2 & - 2x_5 = 5 \\ & x_3 + x_5 = 8 \\ & & x_4 = 5 \end{cases}$$

é um sistema reduzido.

Na fase ascendente atribui-se o valor 1 ao *pivot* da última equação e utiliza-se esta equação para "eliminar" a correspondente variável *pivot* nas restantes equações. Para fazer o *pivot* igual a 1 executa-se uma operação elementar do tipo 2 e com operações do tipo 1 "elimina-se" a variável *pivot* das outras equações.

Relativamente ao sistema  $S'$ , em primeiro lugar multiplica-se a última equação por  $\frac{1}{6}$ , fazendo assim o *pivot* igual a 1 na equação que a substitui. Em seguida, a equação 1 vai ser substituída pela sua soma com -1 vezes a última equação, ficando assim "eliminada" a variável  $x_4$  nessa equação. Também a equação 2 vai ser substituída pela sua soma com 4 vezes a última, o que leva à "eliminação" de  $x_4$  dessa equação. Tem-se pois

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 34 \\ -7x_3 - 4x_4 - 7x_5 = -76 \\ x_4 = 5 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_5 = 29 \\ -7x_3 - 7x_5 = -56 \\ x_4 = 5 \end{array} \right.$$

A fase ascendente continua repetindo aquele procedimento com o sistema que resulta de ignorar a última equação do sistema produzido na iteração anterior. O método termina quando o sistema obtido é reduzido. Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_5 = 29 \\ x_3 + x_5 = 8 \\ x_4 = 5 \end{array} \right. \longrightarrow R = \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 - 2x_5 = 5 \\ x_3 + x_5 = 8 \\ x_4 = 5 \end{array} \right.$$

O método de eliminação de Gauss determinou o sistema reduzido  $R$  que é equivalente a  $S$ . Identificar o conjunto das soluções de um sistema reduzido é trivial. Tudo o que há a fazer é isolar num dos membros de cada equação a única variável dependente que figura nessa equação. O conjunto das soluções do sistema  $R$ , e portanto de  $S$ , é

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : \begin{array}{l} x_1 = 5 + 3x_2 + 2x_5 \\ x_2 = \forall \\ x_3 = 8 - x_5 \\ x_4 = 5 \\ x_5 = \forall \end{array} \right\}.$$

É de notar que, durante a fase descendente, poderá haver necessidade de efectuar operações elementares do tipo 3 (troca de equações). Esta situação ocorre no exemplo que se apresenta em seguida.

## 1.1. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

---

EXEMPLO 7 Vai-se aplicar o método de Gauss para resolver o sistema linear  $3 \times 4$

$$S = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 11 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 11 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -3x_3 = 3 \\ -2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases} \xrightarrow{(*)}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ -3x_3 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_3 = -1 \end{cases} \longrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ -2x_2 + 2x_4 = -2 \\ x_3 = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ x_2 - x_4 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases} \longrightarrow$$

$$R = \begin{cases} x_1 + 3x_4 = 3 \\ x_2 - x_4 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases} \text{ . } (*) \text{ - realizou-se a troca das equações 2 e 3.}$$

O conjunto de soluções do sistema é  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{aligned} x_1 &= 3 - 3x_4 \\ x_2 &= 1 + x_4 \\ x_3 &= -1 \\ x_4 &= \forall \end{aligned}\}$ .

EXEMPLO 8 Vamos agora aplicar o método de eliminação de Gauss ao sistema  $A$ , do tipo  $2 \times 2$ , do Exemplo 4. Na Figura 1.2 apresentam-se as representações geométricas das equações dos sistemas obtidos durante a execução do método.

$$A = \begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{1}{2}x + y = 2 \end{cases} \longrightarrow A' = \begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{3}{2}y = \frac{3}{2} \end{cases} \longrightarrow A'' = \begin{cases} x - y = 1 \\ y = 1 \end{cases} \longrightarrow$$

$$A''' = \begin{cases} x & = 2 \\ y & = 1 \end{cases}$$

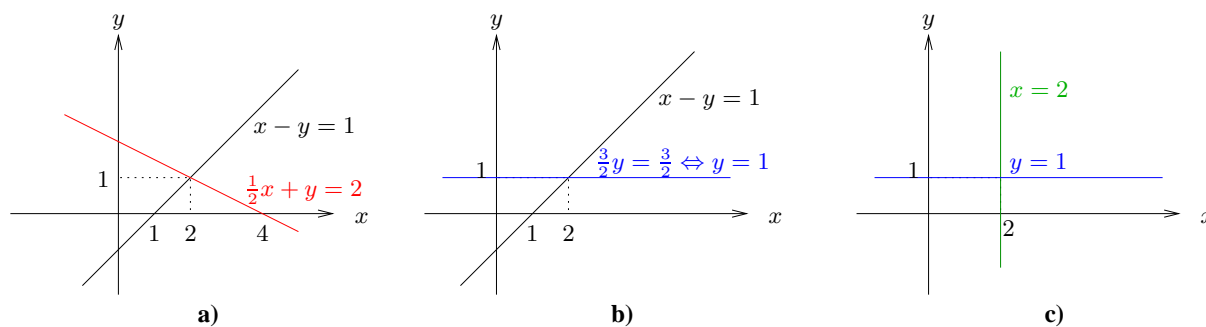


Figura 1.2: Representação das equações dos sistemas: a)  $A$ , b)  $A'$  e  $A''$  e c)  $A'''$  do Exemplo 8.

EXERCÍCIOS 2 Resolva cada um dos seguintes sistemas de equações lineares.

$$1. \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 10 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

Vejam os como o método de eliminação de Gauss se comporta com sistemas impossíveis e perante a existência de equações redundantes.

O sistema

$$S = \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$$

é impossível. De facto, a equação  $3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6$ , que é incompatível com a 3ª equação do sistema, é 2 vezes a 2ª equação menos a 1ª. Aplicando o método de Gauss tem-se

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ 6x_2 - 14x_3 = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ 0 = -5 \end{cases},$$

em que a equação 3 deu lugar à proposição falsa  $0 = -5$ .

Como anteriormente foi referido a equação  $3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6$  obtem-se subtraindo a 1ª equação ao dobro da 2ª. Assim, se em  $S$  substituirmos a 3ª equação por  $3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6$ , esta equação torna-se redundante no sistema resultante. Ao aplicar o método de Gauss a este sistema obtem-se o seguinte resultado.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases} \longrightarrow \dots \longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_2 - 7x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

A equação redundante deu lugar à proposição verdadeira  $0 = 0$  e o método permite concluir que o sistema inicial com três equações é equivalente ao sistema em escada com apenas 2 equações.

Em geral, quando o sistema é impossível é gerada uma proposição falsa do tipo  $0 = a$ , com  $a \neq 0$ . Equações redundantes originam proposições verdadeiras do tipo  $0 = 0$ .

Na Figura 1.3 apresenta-se um esquema para classificar sistemas de equações lineares, a partir do sistema em escada obtido no fim da fase descendente do método de Gauss.

- Sejam  $S$  um sistema de equações lineares e  $S'$  o sistema em escada obtido no fim da fase descendente do método de Gauss.
- Se  $S'$  inclui alguma proposição falsa ( $0 = a$ , com  $a \neq 0$ )  
 $\Rightarrow S$  é **impossível**.  
 Caso contrário  $S$  é **possível**.
- Se só há variáveis *pivot*  $\Rightarrow S$  é **determinado**.  
 Caso contrário  $S$  é **indeterminado**, com tantas variáveis livres quanto o número de variáveis sem *pivot*.

Figura 1.3: Esquema para classificar o sistema de equações lineares  $S$ .

EXEMPLO 9 Para classificar o sistema

$$S = \begin{cases} x_1 - x_2 & = 1 \\ x_2 + 2x_3 & = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 & = 0 \end{cases}$$

aplicámos a fase descendente do método de eliminação de Gauss, de que resultou

$$S \longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 & = 1 \\ x_2 + 2x_3 & = 1 \\ -x_2 & = -2 \end{cases} \longrightarrow S' = \begin{cases} x_1 - x_2 & = 1 \\ x_2 + 2x_3 & = 1 \\ 2x_3 & = -1 \end{cases} .$$

Uma vez que o sistema em escada  $S'$  não inclui proposições falsas, podemos concluir que  $S$  é um sistema possível. Como todas as variáveis são *pivot*, o sistema é determinado e portanto a intersecção dos três planos definidos pelas equações de  $S$  ocorre num único ponto de  $\mathbb{R}^3$ . Note que, substituindo os membros direitos de  $S$  por quaisquer outros valores, o sistema resultante seria também possível e determinado.

EXERCÍCIOS 3

1. Discuta, para todos os valores dos parâmetros, cada um dos seguintes sistemas.

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x - z = 1 \\ y + az = 0 \\ -x + y + 2az = 1 \end{array} \right. , a \in \mathbb{R} \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 = \gamma \\ x_1 + \gamma x_2 + \gamma x_3 = 1 \end{array} \right. , \gamma \in \mathbb{R}. \\
 \\
 \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} ax + 2z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{array} \right. , a, b \in \mathbb{R} \quad \text{d) } \left\{ \begin{array}{l} 2x + 4y + bz = 2 \\ x + (d+2)y = 1 \\ x + 2y + bz = 1 \\ x + 2y = c \end{array} \right. , b, c, d \in \mathbb{R}.
 \end{array}$$

2. Seja  $S$  um sistema de equações lineares do tipo  $m \times n$ . Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

- a) Se  $m < n$ , então  $S$  é indeterminado.
- b) Se  $S$  é possível e  $m < n$ , então é indeterminado com exactamente  $m - n$  variáveis livres.
- c) Se  $m > n$ , então  $S$  é impossível.
- d) Se  $S$  é possível e  $m > n$ , então  $S$  é determinado.
- e) Se  $S$  é possível e  $m = n$ , então  $S$  é determinado.

Um sistema com os membros direitos todos nulos chama-se *homogéneo*. Os sistemas homogéneos são possíveis pois admitem a *solução trivial*, i.e., com todas as variáveis iguais a zero. Note que um sistema homogéneo com menos equações do que variáveis é indeterminado.

## 1.2 Matrizes e vectores

Um sistema de equações lineares pode ser sucintamente representado (a menos dos nomes das variáveis) registando de modo organizado os números envolvidos no sistema. Os coeficientes e os membros direitos do sistema

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 8 \\-x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\3x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 10\end{aligned}$$

podem ser registados na *matriz dos coeficientes* e no *vector do membros direitos*, respectivamente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Cada *elemento* da matriz é referenciado pelo número de linha e número de coluna que ocupa. O elemento  $(i, j)$  é o que figura na linha  $i$  e coluna  $j$ . Uma matriz com  $m$  linhas e  $n$  colunas diz-se do *tipo*  $m$  por  $n$  e escreve-se  $m \times n$ . A matriz  $A$  é do tipo  $3 \times 4$ . O elemento  $(1, 1)$  é 1, o elemento  $(1, 2)$  é 1,  $\dots$ , o elemento  $(3, 4)$  é  $-2$ .

Duas matrizes são iguais se são do mesmo tipo e têm elementos homólogos iguais.

Uma matriz do tipo  $n \times n$  diz-se *quadrada* de ordem de  $n$ . Numa matriz quadrada de ordem  $n$  os elementos  $(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n)$  são os da *diagonal principal*. Se são nulos os elementos por baixo (por cima) da diagonal principal, a matriz diz-se *triangular superior (inferior)*. A matriz é *diagonal* se são nulos os elementos fora da diagonal principal. Uma matriz diagonal com os elementos da diagonal principal iguais a 1 chama-se *matriz identidade* e representa-se por  $I$ .

Um *vector* é uma matriz com uma só coluna. A *componente*  $i$  de um vector é o elemento da linha  $i$ . O vector  $b$  tem 3 componentes.

O método de eliminação de Gauss para classificar ou resolver um sistema, em que  $A$  é a matriz de coeficientes e  $b$  o vector membro direito, pode ser aplicado directamente à

matriz ampliada  $[A|b]$ .

EXEMPLO 10 A matriz ampliada do sistema  $3 \times 4$

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 10 \end{cases} \quad \acute{e} \quad [A|b] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & -2 & 10 \end{array} \right],$$

à qual aplicamos o método de Gauss, de que resultou o seguinte.

$$[A|b] \longrightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & 1 & -14 \end{array} \right] \longrightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -52 & 1 & -104 \end{array} \right] = [A'|b].$$

A obtenção desta matriz em escada indica o fim da fase descendente do método. Numa *matriz em escada* o primeiro elemento não nulo de uma linha - o *pivot* - está mais à direita do que o primeiro não nulo da linha anterior.

A não existência de linhas  $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ | \ a]$ , com  $a \neq 0$ , permite concluir que  $S$  é um sistema possível. A existência em  $A'$  de colunas sem *pivots* (coluna 4) indica que o sistema é indeterminado.

**Definição 1** Chama-se característica de uma matriz  $A$ , e representa-se por  $\text{car } A$ , o número de colunas com *pivot* da matriz em escada que se obtém aplicando o método de Gauss a  $A$ .

Tem-se pois  $\text{car } A = 3$  e  $\text{car } [A|b] = 3$ .

Os raciocínios anteriores que nos levaram a concluir que o sistema que estamos a analisar é possível e indeterminado, podem ser enunciados utilizando a noção de característica.

### Proposição 1.1

1. O sistema cuja matriz ampliada é  $[A|b]$  é possível sse  $\text{car } A = \text{car } [A|b]$ .

2. Se o sistema é possível, é determinado sse car  $A$  é igual ao número de colunas de  $A$ .

A fase ascendente do método prossegue com a matriz

$$[A'|b'] \longrightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{52} & 2 \end{array} \right] \longrightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{50}{52} & 4 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{5}{52} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{52} & 2 \end{array} \right] \longrightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{45}{52} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{52} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{52} & 2 \end{array} \right]$$

e termina com esta matriz reduzida. Uma *matriz reduzida* é uma matriz em escada em que nas colunas com *pivot* os elementos são todos nulos excepto o *pivot* que é igual a 1.

A matriz reduzida que resultou do método de Gauss representa o sistema reduzido

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{45}{52}x_4 &= 3 \\ x_2 - \frac{5}{52}x_4 &= 1 \\ x_3 - \frac{1}{52}x_4 &= 2, \end{aligned}$$

que é equivalente ao sistema dado e cujas soluções são dadas por  $x_1 = 3 + \frac{45}{52}x_4$ ,  $x_2 = 1 + \frac{5}{52}x_4$ ,  $x_3 = 2 + \frac{1}{52}x_4$ ,  $x_4 = \forall$ .

#### EXERCÍCIOS 4

1. Discuta e interprete geometricamente o sistema de equações lineares correspondente a cada uma das seguintes matrizes ampliadas.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 3 \end{array} \right] \quad \text{b) } \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] \quad \text{c) } \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right]. \end{array}$$

2. Considere os sistemas de equações lineares cujas correspondentes matrizes ampliadas são

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & a & b_2 \\ -1 & 1 & 2a & b_3 \end{array} \right], \text{ com } a, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

- a) Para que valores de  $a$  os sistemas são possíveis, independentemente dos valores dos parâmetros  $b_1, b_2, b_3$ ?
- b) Para que valores de  $b_1, b_2, b_3$  os sistemas são possíveis, independentemente do valor do parâmetro  $a$ ?
- c) Atribua a  $a, b_1, b_2, b_3$  valores que façam o sistema
- c1) impossível,
- c2) indeterminado.

3. É correcto afirmar que um sistema de equações lineares do tipo  $n \times n$  é possível e determinado se e só se a matriz reduzida que se obtem quando se aplica o método de Gauss à matriz dos coeficientes é a matriz identidade? Justifique.

4. Seja  $E$  uma matriz em escada do tipo  $m \times n$ .

- a) Quantos *pivots* podem existir em  $E$ ?
- b) Qual é a relação entre o número de *pivots* e o número de linhas nulas de  $E$ ?

As matrizes não aparecem apenas no contexto dos sistemas de equações lineares. São objectos matemáticos com uma aritmética própria. Em seguida apresentam-se algumas operações com matrizes.

### 1.3 Operações com matrizes

Considere

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

matrizes genéricas do tipo  $m \times n$  e um vector com  $n$  componentes e seja  $\lambda$  um escalar.

**Definição 2** A *transposta* de  $A$  é a matriz

$$A^{\top} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

i.e., a matriz do tipo  $n \times m$ , cuja coluna  $j$  é a linha  $j$  de  $A$ .

EXEMPLO 11

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

O seguinte resultado é óbvio.

**Proposição 1.2**  $(A^{\top})^{\top} = A$ .

Uma matriz diz-se *simétrica* se é igual à transposta.

EXEMPLO 12

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 \\ -1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica.

**Definição 3** O *produto escalar* de  $\lambda$  por  $A$  é

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

EXEMPLO 13

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & 6 & 2 \\ 6 & 0 & 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

O produto escalar verifica as seguintes propriedades.

**Proposição 1.3** *Se  $A$  é uma matriz e  $\lambda$  e  $\mu$  são escalares, tem-se*

1.  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ .
2.  $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$ .

Apresenta-se agora a definição de soma de matrizes do mesmo tipo.

**Definição 4** *A soma de  $A$  e  $B$  é*

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

EXEMPLO 14

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & -2 \\ 0 & -5 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

É fácil provar os seguintes resultados.

**Proposição 1.4** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes do tipo  $m \times n$ , e  $\lambda$  e  $\mu$  escalares.*

1.  $A + B = B + A$ .
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$ .

3. Se  $0$  é a matriz nula do tipo  $m \times n$  e  $-A = -1A$ , tem-se  $A + 0 = A$  e  $A + (-A) = A - A = 0$ .
4.  $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$ .
5. Se  $Q$  é uma matriz quadrada, a matriz  $Q + Q^\top$  é simétrica.
6.  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ .
7.  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ .

EXERCÍCIOS 5

1. Para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

calcule, sempre que possível, o valor de cada uma das seguintes expressões.

- a)  $(5A - A) - (B - 2B)$
- b)  $(2A - B)^\top - C$
- c)  $(2(A^\top - C)^\top + B)^\top$
- d)  $(B^\top - C)^\top + 2B^\top$
- e)  $D + D^\top$
- f)  $D - D^\top$ .

2. Identifique, se existirem, escalares  $\alpha$  e  $\beta$  tais que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}.$$

A multiplicação de matrizes é uma operação um pouco mais complexa do que as apresentadas anteriormente. Começamos por definir a multiplicação de matrizes por vectores.

**Definição 5** O produto de  $A$  por  $x$  é

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

EXEMPLO 15

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nas observações seguintes estabelece-se a notação matricial de sistemas de equações lineares e apresenta-se uma nova interpretação geométrica da resolução de sistemas.

OBSERVAÇÕES 2

$$\begin{aligned} 1. \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 & -1 \times 1 & + 0 \times 2 & + 3 \times (-1) \\ 2 \times (-1) & -1 \times (-2) & + 0 \times 3 & + 3 \times 1 \\ 2 \times 3 & -1 \times 0 & + 0 \times 4 & + 3 \times (-2) \end{bmatrix} = \\ & = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De um modo geral tem-se

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

i.e., o vector  $Ax$  é soma de múltiplos das colunas da matriz  $A$ , em que coluna  $j$  de  $A$  é multiplicada pela componente  $j$  de  $x$ .

2. O sistema

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 8 \\-x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1 \\3x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 10\end{aligned}$$

escreve-se matricialmente na forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

De um modo geral o sistema de equações lineares

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

é representado pela equação matricial  $Ax = b$ , em que  $A$  é a matriz dos coeficientes e  $b$  o vector membro direito.

3. Como consequência das duas observações anteriores tem-se a seguinte interpretação geométrica para a classificação e resolução de sistemas de equações lineares. O sistema  $Ax = b$  é possível sse "percorrendo" as direcções das colunas de  $A$  é possível "atingir" o vector  $b$ . Cada solução é a quantificação do "percurso" em cada uma das direcções.

O sistema

$$S = \begin{cases} x + y = 6 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é possível pois "percorrendo" a direcção do vector  $(1, 1)$  e a direcção do vector  $(1, -2)$  "atinge-se" o membro direito  $(6, 0)$  (ver Figura 1.4). De facto, tem-se

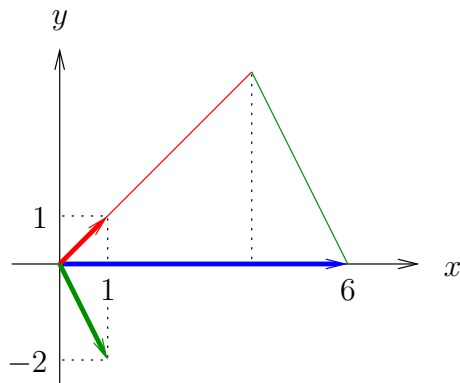


Figura 1.4: Interpretação geométrica da resolução do sistema  $S$  da Observação 2.3.

$$4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

É fácil deduzir as seguintes propriedades.

**Proposição 1.5** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes do tipo  $m \times n$ ,  $I$  a matriz identidade de ordem  $n$ ,  $x$  e  $y$  vectores com  $n$  componentes e  $\lambda$  um escalar. Tem-se*

1.  $Ix = x$ ,
2.  $A(x + y) = Ax + Ay$ ,
3.  $(A + B)x = Ax + Bx$ ,
4.  $A(\lambda x) = \lambda(Ax) = (\lambda A)x$ .

#### EXERCÍCIOS 6

1. Sejam  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$  e  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

- a) Calcule  $Ab + Ib$ ,  $(A + I)b$ ,  $(A + A^T)2b$  e  $b^T b$ .

b) Resolva a equação matricial  $Ax = 3x + b$ , com  $x \in \mathbb{R}^3$ .

2. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  e o vector genérico de  $\mathbb{R}^2$   $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ .

a) Calcule, em função de  $x$  e  $y$ , o vector  $Av$  e represente geometricamente  $v$  e  $Av$ .

b) Qual é a relação entre os vectores  $v$  e  $Av$ ?

3. Considere  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e o sistema homogéneo  $(A - \lambda I)x = \vec{0}$ , com  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

a) Para que valores de  $\lambda$  o sistema é indeterminado?

b) Mostre que se  $v \in \mathbb{R}^3$  é solução do sistema, então  $Av = \lambda v$ .

c) Resolva o sistema considerando  $\lambda = -1$ . Interprete geometricamente o conjunto das soluções e a relação estabelecida na alínea b).

4. Justifique que, se  $A$  é uma matriz com  $n$  colunas e  $l$  é o número de variáveis livres do conjunto de soluções do sistema  $Ax = 0$ , tem-se  $l + \text{car } A = n$ .

5. Seja  $A$  uma matriz do tipo  $m \times n$ . Mostre que as proposições seguintes são equivalentes.

a) O sistema  $Ax = b$  é possível para todo o vector  $b$  de  $\mathbb{R}^m$ .

b)  $\text{car } A = m$ .

A multiplicação de matrizes realiza-se efectuando sucessivas multiplicações de matrizes por vectores. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

### 1.3. OPERAÇÕES COM MATRIZES

---

matrizes do tipo  $m \times n$  e  $n \times r$ , respectivamente. As matrizes  $A$  e  $B$  dizem-se *encadeadas* pois o número de colunas de  $A$  é igual ao número de linhas de  $B$ .

**Definição 6** O *produto* de  $A$  por  $B$  é uma matriz do tipo  $m \times r$ , cuja coluna  $j$ ,  $j = 1, \dots, r$ , é o produto da matriz  $A$  pela coluna  $j$  de  $B$ .

EXEMPLO 16

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -6 \\ 3 & 2 & -14 \\ 0 & 19 & -11 \end{bmatrix}.$$

OBSERVAÇÃO 3 O elemento  $(i, j)$  da matriz  $P = AB$  é o "produto da linha  $i$  de  $A$  pela coluna  $j$  de  $B$ ", i.e.,  $p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ .

É fácil verificar que a multiplicação de matrizes satisfaz as seguintes propriedades.

**Proposição 1.6** *Sejam  $A, B, C$  matrizes,  $I$  matriz identidade e  $\lambda$  um escalar. Sempre que as operações se possam realizar, tem-se*

1.  $AI = A$ .
2.  $(AB)C = A(BC)$ .
3.  $A(B + C) = AB + AC$ .
4.  $(A + B)C = AC + BC$ .
5.  $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$ .
6.  $(AB)^\top = B^\top A^\top$ .

OBSERVAÇÕES 4

1. Em geral  $AB \neq BA$ , i.e., a multiplicação de matrizes não é comutativa. Verifique que  $AB \neq BA$ , para  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ .

Quando  $AB = BA$  as matrizes dizem-se *permutáveis*. Qualquer matriz quadrada é permutável com a matriz identidade da mesma ordem.

2. Em  $\mathbb{R}$  tem-se  $ab = 0 \Rightarrow a = 0$  ou  $b = 0$  (lei do anulamento do produto). Para matrizes  $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$  ou  $B = 0$ . Verifique que  $AB = 0$ , com  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

3. Em  $\mathbb{R}$  tem-se  $ab = ac$  e  $a \neq 0 \Rightarrow b = c$  (lei do corte). Para matrizes  $AB = AC$  e  $A \neq 0 \not\Rightarrow B = C$ . Verifique que  $AB = AC$ , para  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ .

EXERCÍCIO 7 Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule, se possível,  $AB$ ,  $BA$ ,  $BA^\top$ ,  $CC$ ,  $AA^\top$ ,  $a^\top a$  e  $a a^\top$ .

Uma vez definida a multiplicação de matrizes é natural atribuir significado à potência de expoente inteiro não negativo de uma matriz quadrada.

**Definição 7** Sejam  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $I$  a matriz identidade de ordem  $n$ . A *potência* de expoente inteiro  $k \geq 0$  da matriz  $A$  é

$$A^k = \begin{cases} \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ vezes}} & \text{se } k \geq 1 \\ I & \text{se } k = 0 \end{cases}.$$

EXERCÍCIO 8 Calcule  $B^3$  com  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ .

A noção de inversa de uma matriz é análoga à do inverso de um número real. O inverso do real  $a$  é  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $ab = 1$ . O inverso de  $a$  representa-se por  $a^{-1}$  e, para  $a \neq 0$ , tem-se  $a^{-1} = \frac{1}{a}$ .

Para matrizes tem-se a seguinte definição.

**Definição 8** A *inversa* de uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$ , é uma matriz quadrada  $B$  de ordem  $n$ , tal que  $AB = BA = I$ . A matriz inversa de  $A$  representa-se por  $A^{-1}$ .

EXERCÍCIO 9 Verifique que  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$ .

Se uma matriz tem inversa diz-se *invertível* ou *não singular*. Caso contrário diz-se *singular*.

OBSERVAÇÃO 5 Da definição de inversa decorre directamente que se  $A$  é invertível  $A^{-1}$  também é invertível e  $(A^{-1})^{-1} = A$  (i.e.,  $A$  é a inversa da inversa de  $A$ ).

De acordo com a Definição 8, para verificar se uma dada matriz  $B$  é a inversa de  $A$ , há que efectuar os produtos  $AB$  e  $BA$  e ver se ambos são iguais à matriz identidade. O seguinte resultado permite concluir que essa verificação não requer mais do que um daqueles produtos.

**Teorema 1.7** Se  $AB = I$ , então  $BA = I$ , i.e., uma matriz e a sua inversa são permutáveis.

Facilmente se provam os seguintes resultados.

**Proposição 1.8**

1. Uma matriz não singular tem uma única inversa.
2. Se  $A$  e  $B$  são matrizes não singulares da mesma ordem, então  $AB$  é não singular e  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  (a inversa do produto é o produto das inversas por ordem inversa).
3.  $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ , para  $k \in \mathbb{Z}_0^+$ .
4.  $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$ .

EXERCÍCIO 10 Prove os resultados da Proposição 1.8.

Vejamos agora como determinar a inversa de uma matriz ou decidir que a matriz não é invertível. Para isso consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Pretende-se determinar uma matriz  $B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ | & | & | \end{bmatrix}$  tal que

$$A \begin{bmatrix} x & y & z \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja resolver os três sistemas de equações:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ay = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 1.3. OPERAÇÕES COM MATRIZES

---

$$Az = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para resolver estes três sistemas, que têm a mesma matriz de coeficientes, aplica-se o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [A|I] \rightarrow \dots \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right].$$

Tem-se pois

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e assim

$$A \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

de onde se conclui que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vejamos o resultado do procedimento anterior com a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$[A|I] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

A matriz em escada obtida permite concluir que os sistemas

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são impossíveis e portanto não existe uma matriz  $B$  tal que  $AB = I$ , i.e.,  $A$  é singular.

Na Figura 1.5 sistematiza-se este método para identificar a inversa de uma matriz quadrada ou decidir que a matriz é singular.

- Sejam  $A$  uma matriz quadrada,  $[A|I]$  a matriz  $A$  ampliada com a identidade e  $[A'|I']$  a matriz em escada resultante de aplicar a fase descendente do método de Gauss a  $[A|I]$ . (Note que  $I'$  não tem linhas nulas.)
- Se  $A'$  tem alguma linha nula  $\Rightarrow A$  é **singular**.  
 Caso contrário  $A$  é **invertível**.  
 Para determinar  $A^{-1}$  aplique a fase ascendente do método de Gauss à matriz  $[A'|I']$ . A matriz reduzida resultante é do tipo  $[I|A'']$  e  $A^{-1} = A''$ .

Figura 1.5: Esquema para determinar a inversa da matriz  $A$  ou decidir que  $A$  é singular.

Uma vez que a existência de linhas nulas na matriz  $A'$  significa que nem todas as colunas têm *pivot*, tem-se o seguinte resultado.

**Proposição 1.9** *Uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  é invertível sse  $\text{car } A = n$ .*

Terminamos este capítulo com o conceito de independência linear de vetores.

**Definição 9** Seja  $A$  uma matriz do tipo  $m \times n$  e  $C = \{A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_k}\}$  um conjunto de  $k$  colunas de  $A$ . Diz-se que  $C$  é um conjunto *linearmente independente* se  $\text{car}[A_{j_1} \ A_{j_2} \ \dots \ A_{j_k}] = k$ . Caso contrário diz-se que  $C$  é *linearmente dependente*.

Assim, uma matriz quadrada é invertível sse as colunas são linearmente independentes. A característica de uma matriz é o número máximo de colunas linearmente independentes.

EXERCÍCIOS 11

1. Determine, caso exista, a inversa de cada uma das seguintes matrizes.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Mostre que a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$  é não singular e utilize  $A^{-1}$  para resolver o

sistema  $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

3. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes invertíveis da mesma ordem.

- É correcto afirmar que  $A + B$  é invertível?
- Será que a matriz  $A^3BC^{-1}$  é invertível?
- Mostre que  $A^{-1}(A + B)B^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ .
- Prove que se  $AB = AC$ , então  $B = C$ .

4. Sejam  $A$  uma matriz quadrada de ordem 3 invertível e  $b$  e  $c$  vectores de  $\mathbb{R}^3$ .

- Classifique os sistemas  $Ax = b$  e  $A^{-1}x = c$ .

b) Prove que os sistemas  $Ax = b$  e  $A^{-1}x = c$  são equivalentes sse  $b = A^2c$ .

c) Sejam  $u$ ,  $v$  e  $w$  as soluções dos sistemas

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Determine, em termos dos vectores  $u$ ,  $v$  e  $w$ , a matriz inversa de  $A$ .

5. Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Mostre que as proposições seguintes são equivalentes.

a)  $A$  é invertível.

b)  $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

c) O sistema  $Ax = b$  é possível para todo o vector  $b$  de  $\mathbb{R}^n$ .

6. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  e o vector  $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

a) Verifique que o sistema  $Ax = b$  é possível.

b) Qual é a característica de  $A$ ?

c) Indique um conjunto linearmente independente maximal de colunas de  $A$ .

7. (Teste Módulo 2 - 2006/2007)

Calcule  $A^2 + 3bb^T$ , com  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

8. (Teste Módulo 2 - 2006/2007)

Considere  $A = \begin{bmatrix} \alpha & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -\alpha \end{bmatrix}$  e  $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 + \beta \end{bmatrix}$ , com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- Discuta o sistema  $Ax = b$  para todos os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ .
- Resolva o sistema  $Ax = b$ , considerando  $\alpha = 0$  e  $\beta = -3$ .
- Indique, justificando, um valor de  $\alpha$  para o qual a matriz  $A$  é invertível.

9. (Teste Módulo 2 - 2006/2007)

Seja  $Ax = b$  um sistema que admite as soluções não nulas  $u$  e  $v$ . Em que condições o vector  $u + v$  ainda é solução de  $Ax = b$ ? Justifique.

## Capítulo 2

### Introdução à programação linear

Considere o seguinte problema. Uma exploração agrícola dispõe de 80 hectares de terra para produzir tomate e trigo. Os recursos susceptíveis de limitar a produção das duas culturas são a terra (80 ha), a água para rega e o trabalho, de acordo com os valores indicados no quadro seguinte.

recursos	Necessidades (por ha)		Disponibilidade
	tomate	trigo	
Água (m <sup>3</sup> )	8000	0	320000
Trabalho (DH)	40	20	2000

As receitas resultantes de cada hectare de tomate e de trigo são 300 e 200 Euros, respectivamente. Quais as áreas a destinar a cada uma das culturas de modo que a receita total seja máxima?

Para descrever matematicamente o problema, vamos usar as variáveis  $x$ , que indica o número de hectares que vão ser destinados à cultura do tomate e  $y$ , que indica o número de hectares destinados à cultura do trigo. Com estas variáveis o problema consiste em

---

$$\text{maximizar} \quad z = 300x + 200y \quad (2.1)$$

$$\text{sujeito a} \quad x + y \leq 80 \quad (2.2)$$

$$8000x \leq 320000 \quad (2.3)$$

$$40x + 20y \leq 2000 \quad (2.4)$$

$$x, y \geq 0 \quad (2.5)$$

As *desigualdades lineares* (2.2), (2.3) e (2.4) traduzem as limitações decorrentes dos recursos terra, água e trabalho, respectivamente. As *restrições de sinal* (2.5) invalidam opções matematicamente válidas, mas sem nexo (em que áreas negativas são atribuídas a uma das culturas). A *função objetivo* (2.1) estabelece o valor, em euros, da receita correspondente à opção  $x$  ha destinados à cultura do tomate e  $y$  ha à cultura do trigo.

O problema (2.1)-(2.5) é um caso particular do problema de programação linear.

A programação linear trata da maximização ou minimização de funções lineares, em que as variáveis satisfazem restrições lineares. O problema geral de programação linear consiste em determinar valores para as variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que optimizam (maximizam ou minimizam) uma função linear

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

chamada *função objetivo*, sujeito a restrições lineares do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq, \leq \text{ ou } = b$$

e restrições de sinal das variáveis

$$x_j \geq, \leq \text{ ou } \gtrsim 0 \quad (\gtrsim \text{ significa maior, menor ou igual})$$

Muitos problemas podem ser formulados desta forma. Vejamos alguns exemplos.

#### EXEMPLOS 17

- Um criador de porcos pretende estabelecer com custo mínimo um concentrado composto que satisfaça certos requisitos nutricionais para a alimentação dos seus animais, de acordo com os dados fornecidos na seguinte tabela.

ingredientes	Unidades contidas em cada Kg			valores min. diários	valores max. diários
	milho	farinhas de carne e osso	luzerna		
hidratos carbono	90	20	40	200	
proteína	30	80	60	180	
fibra	15	0	30		70
vitaminas	10	20	60	150	270
aminoácidos	10	25	15	15	
custo (Euros/Kg)	0.30	0.25	0.18		

Para modelar esta situação utilizamos as variáveis  $x_1, x_2, x_3$  que indicam as quantidades em Kgs de milho, farinhas de carne e osso e luzerna, respectivamente, que integram a mistura. Com essas variáveis o problema pode ser formulado linearmente do seguinte modo.

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar} \quad & z = 0.30x_1 + 0.25x_2 + 0.18x_3 \\
 \text{sujeito a} \quad & 90x_1 + 20x_2 + 40x_3 \geq 200 \\
 & 30x_1 + 80x_2 + 60x_3 \geq 180 \\
 & 15x_1 \quad + 30x_3 \leq 70 \\
 & 10x_1 + 20x_2 + 60x_3 \geq 150 \\
 & 10x_1 + 20x_2 + 60x_3 \leq 270 \\
 & 10x_1 + 25x_2 + 15x_3 \geq 15 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

- A água que abastece três regiões no Alentejo, R1, R2 e R3, provém das barragens B1 e B2. Estima-se que as regiões R1, R2 e R3 necessitam anualmente, pelo menos, 10,

---

5 e 15 milhões de metros cúbicos de água, respectivamente. Sabe-se que no próximo ano as barragens B1 e B2 poderão fornecer até 14 e 16 milhões de metros cúbicos, respectivamente. O custo, em  $10^4$  Euros, do abastecimento de cada  $10^6\text{m}^3$  de água de cada barragem para cada uma das regiões, é indicado no quadro seguinte.

	R1	R2	R3
B1	14	10	9
B2	13	11	12

Qual é o plano abastecimento de água às três regiões a que corresponde o menor custo?

Se representarmos por  $x_{ij}$ , com  $1 \leq i \leq 2$  e  $1 \leq j \leq 3$ , a quantidade de água, em milhões de metros cúbicos, que a barragem  $B_i$  fornece à região  $R_j$ , o problema pode ser formulado da seguinte forma.

$$\begin{aligned}
 \text{minimizar} \quad & z = 14x_{11} + 10x_{12} + 9x_{13} + 13x_{21} + 11x_{22} + 12x_{23} \\
 \text{sujeito a} \quad & x_{11} + x_{21} \geq 10 \\
 & x_{12} + x_{22} \geq 5 \\
 & x_{13} + x_{23} \geq 15 \\
 & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 14 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 16 \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0
 \end{aligned}$$

Há uma terminologia própria da programação linear. Assim, chama-se *região admissível* ao conjunto dos pontos que satisfazem todas as restrições. Um ponto da região admissível chama-se *solução admissível*. É *solução ótima* a que corresponde ao maior ou menor valor da função objectivo, consoante o problema é de maximização ou de minimização.

Quando só há duas variáveis, o problema de programação linear pode ser facilmente solucionado recorrendo a argumentos geométricos. Consideremos o problema (2.1)-(2.5), que pode equivalentemente ser escrito da seguinte forma.

$$\text{maximizar} \quad z = 300x + 200y \quad (2.6)$$

$$\text{sujeito a} \quad x + y \leq 80 \quad (2.7)$$

$$x \leq 40 \quad (2.8)$$

$$2x + y \leq 100 \quad (2.9)$$

$$x, y \geq 0 \quad (2.10)$$

O conjunto das soluções admissíveis é o *poliedro*  $\mathcal{R}$  representado na Figura 2.1. (Um poliedro é a intersecção de um número finito de inequações lineares.)

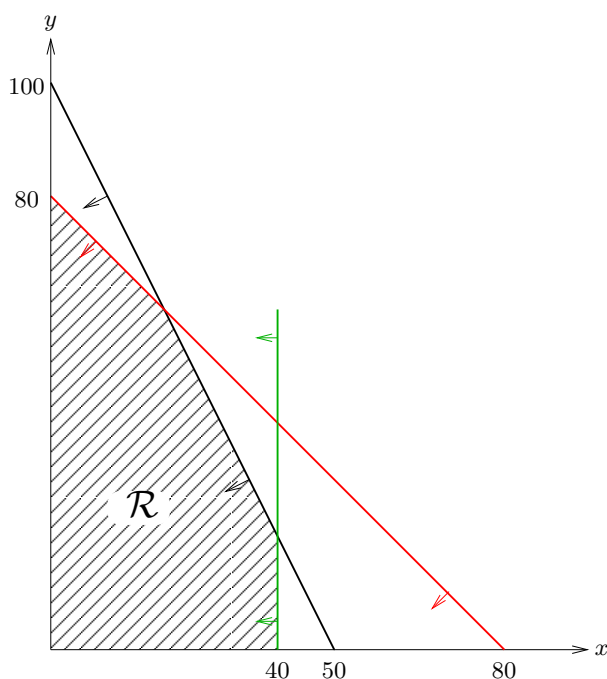


Figura 2.1: Região admissível definida pelas restrições (2.7), (2.8), (2.9) e (2.10).

Para identificar uma solução a que corresponde o maior valor de  $z$ , comecemos por notar que se fixarmos o valor de  $z$ , por exemplo fazendo  $z = 6000$ , obtemos

$$300x + 200y = 6000$$

que é uma equação da recta  $r$  representada na Figura 2.2. Todas as soluções admissíveis

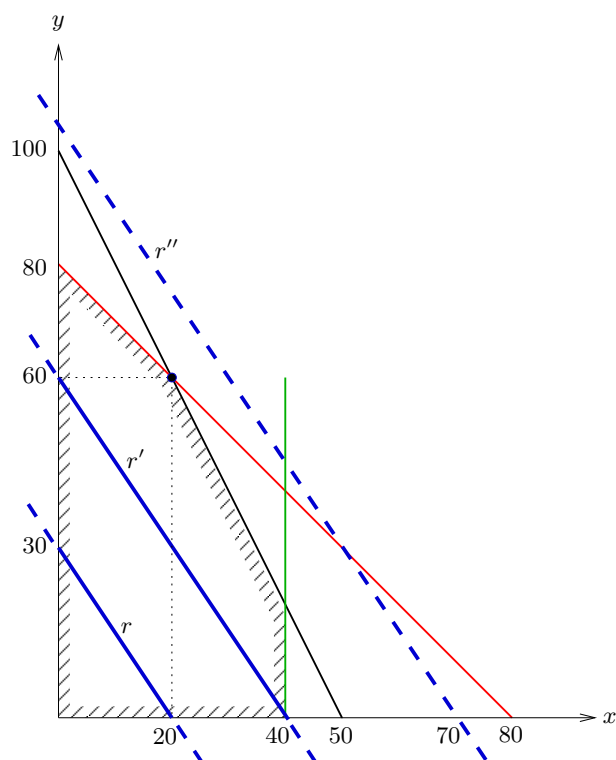


Figura 2.2: Representação das soluções admissíveis do problema (2.6)-(2.10) com valores da função objectivo iguais a 6000 ( $r$ ) e a 12000 ( $r'$ ).

que estão nessa recta têm portanto valor da função objectivo igual a 6000. Estão nesta situação as duas opções admissíveis extremas que consistem em destinar 20 ha do terreno para a cultura do tomate e zero para o trigo ( $x = 20, y = 0$ ), e a que reserva 30 ha para trigo e zero para tomate ( $x = 0, y = 30$ ). A ambas (e todas as opções do segmento que as une) corresponde uma receita total de 6000 Euros.

Se queremos um lucro maior, igualamos  $z$  ao valor (maior do que 6000) desejado e procuramos soluções admissíveis que satisfaçam essa relação. Por exemplo, se pretendemos obter um lucro de 12000 Euros, procuramos soluções admissíveis que satisfaçam a equação

$$300x + 200y = 12000.$$

A equação define a recta  $r'$  da Figura 2.2 e as soluções admissíveis que a satisfazem estão no segmento cujos extremos são os pontos  $(40, 0)$ , que consiste a atribuir 40 ha à exploração do tomate e zero à cultura do trigo e  $(0, 60)$ , que destina ao trigo 60 ha e zero ao tomate.

Se formos demasiado ambiciosos em relação às receitas totais, corremos o risco de não existirem soluções admissíveis correspondentes aos valores pretendidos. Por exemplo, nenhum dos pontos da recta de equação

$$300x + 200y = 21000,$$

representada por  $r''$  na Figura 2.2, é admissível. Por outras palavras, não é viável atingir uma receita total de 21000 Euros com as presentes limitações dos recursos que condicionam a produção agrícola.

Do que ficou dito pode concluir-se que o valor  $z^*$  da receita total máxima é tal que a recta de equação

$$300x + 200y = z^*$$

intersecta a região admissível, mas para todo o  $\delta > 0$ , a recta de equação

$$300x + 200y = z^* + \delta$$

já não inclui qualquer solução admissível. É evidente, e este é o facto que se pretende destacar, que o valor desejado  $z^*$  ocorre num *vértice* da região admissível.

No exemplo que estamos a analisar o maior valor de (2.6) ocorre no vértice  $(20, 60)$ , que corresponde a reservar 20 ha de terreno para o tomate e 60 ha para o trigo, a que está

---

associado o lucro máximo de 18000 Euros. Note que esta solução utiliza na totalidade os recursos disponíveis respeitantes à dimensão da exploração (restrição (2.7)) e trabalho (restrição (2.9)). Diz-se então que as restrições (2.7) e (2.9) estão *saturadas*. São estas as restrições que limitam o valor da receita total. Já a quantidade de água disponível não é toda utilizada na opção óptima.

Neste caso (20, 60) é a única solução óptima. Note que, se em lugar de (2.6), a função objectivo fosse

$$z = 400x + 200y$$

então haveria mais do que uma alternativa óptima. De facto, os dois vértices (20, 60) e (40, 20), bem como todos os pontos do segmento que os ligam, teriam valores da função objectivo iguais a 20000, que é o valor máximo.

Julgamos que o exemplo que acabámos de tratar é suficientemente esclarecedor para justificar que o facto da função objectivo ser linear garante que a optimalidade ocorre em pelo menos um vértice da região admissível. Assim, uma solução óptima pode ser encontrada enumerando os vértices do poliedro, calculando para cada um deles o correspondente valor da função objectivo e seleccionando para solução óptima um vértice a que corresponda o maior ou menor (consoante se trate de maximizar ou minimizar) valor.

**EXERCÍCIO 12** Considere o seguinte problema de programação linear.

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- Represente geometricamente a região admissível.
- Indique uma solução óptima, o valor da função objectivo nesse ponto e identifique as restrições *saturadas* (satisfeitas com igualdades).

- c) Indique o maior intervalo de variação do membro direito da terceira restrição que mantém óptima a solução que refiriu na alínea b).
- d) Dê exemplo de uma outra função objectivo relativamente à qual se mantém óptima a solução que indicou na alínea b).

Argumentos geométricos análogos aos utilizados para o caso de duas variáveis também validam que o procedimento anterior possa ser utilizado para resolver problemas de programação linear que envolvem três variáveis. Consideremos o problema seguinte.

$$\text{maximizar} \quad z = x_1 + 2x_3 \quad (2.11)$$

$$\text{sujeito a} \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad (2.12)$$

$$x_1 \leq 2 \quad (2.13)$$

$$x_3 \leq 3 \quad (2.14)$$

$$3x_2 + x_3 \leq 6 \quad (2.15)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad (2.16)$$

A região admissível é o poliedro representado na Figura 2.3.

Os vértices do poliedro e os correspondentes valores da função objectivo estão indicados na Tabela 2.1.

De acordo com o procedimento anterior  $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 3$  é solução óptima, pois é o vértice a que corresponde o maior valor da função objectivo.

De facto, quando igualamos a função objectivo a um certo valor  $v$ , obtemos a equação

$$x_1 + 0x_2 + 2x_3 = v$$

de um plano ortogonal ao vector  $(1, 0, 1)$ . Na Figura 2.4 estão representadas as intersecções do poliedro da admissibilidade com três desses planos, resultantes de diferentes concretizações de  $v$ . (A intensidade da intersecção é tanto mais acentuada quanto maior for o valor de  $v$ .) Os pontos do mesmo plano têm igual valor da função objectivo. Os

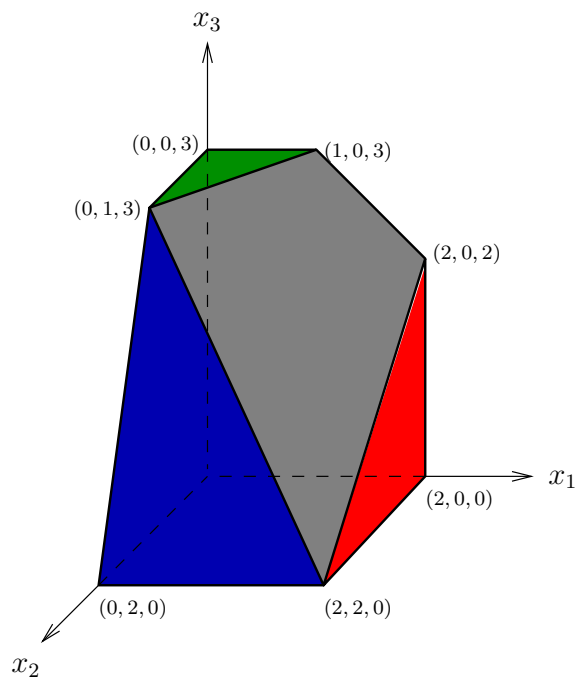


Figura 2.3: Região admissível correspondente às restrições (2.12), (2.13), (2.14), (2.15), e (2.16).

que estão no plano mais escuro têm maiores valores. Se deslocarmos este plano no sentido definido pelo vector representado na figura, estamos a obter pontos com valores da função objectivo cada vez maiores. O plano 'mais deslocado' no sentido desse vector, e que inclui soluções admissíveis, intersecta o poliedro apenas no ponto  $(1, 0, 3)$ . Pode então concluir-se que  $(1, 0, 3)$  é uma solução admissível com o valor máximo, e portanto que a optimalidade ocorre num vértice.

Mesmo quando há mais do que três variáveis envolvidas, a optimalidade pode ser procurada nos vértices do poliedro da admissibilidade. De facto, tem-se o seguinte resultado.

**Teorema 2.1** *Se  $\mathcal{P}$  é um poliedro não vazio e limitado de  $\mathbb{R}^n$  e  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  é um vector de  $\mathbb{R}^n$ ,*

vértice	correspondente valor da função objectivo $x_1 + 2x_3$
(0, 0, 0)	0
(0, 2, 0)	0
(2, 2, 0)	2
(2, 0, 0)	2
(2, 0, 2)	6
(1, 0, 3)	7
(0, 0, 3)	6
(0, 1, 3)	6

Tabela 2.1: Vértices do poliedro e respectivos valores da função objectivo do problema (2.11)-(2.16).

1. Existe um vértice de  $\mathcal{P}$  que é solução óptima do problema de programação linear

$$\text{maximizar (minimizar)} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{sujeito a} \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{P}$$

2. Se os vértices  $v_1, v_2, \dots, v_k$  são soluções óptimas, então  $\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \dots + \lambda_kv_k$ , com  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$  e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \geq 0$ , também é solução óptima.

O teorema anterior remete-nos para a identificação dos vértices de um poliedro. Em seguida vamos ver, o que não é assim tão surpreendente, que os vértices podem ser determinados resolvendo sistemas de equações lineares. Note que, por exemplo, o vértice (20, 60) do poliedro representado na Figura 2.1 é a intersecção das rectas definidas pelas equações que se obtêm substituindo o símbolo " $\leq$ " por " $=$ " nas restrições (2.7) e (2.9). Por outras palavras, (20, 60) é a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ 2x + y = 100 \end{cases}.$$

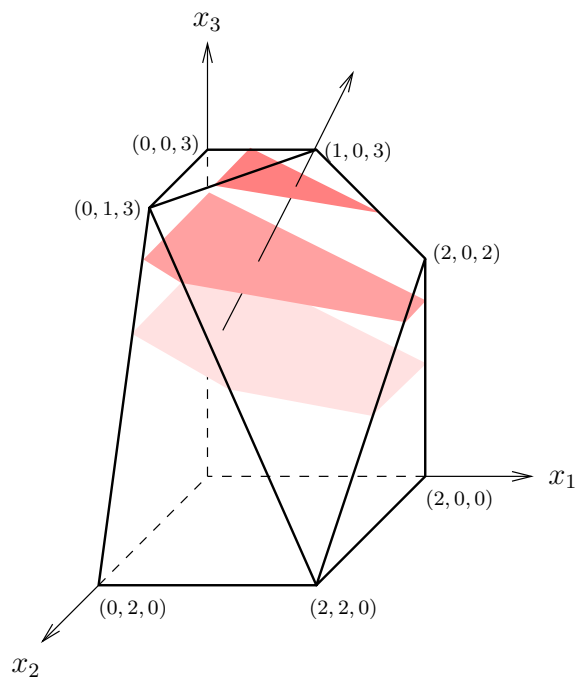


Figura 2.4: Intersecções do poliedro da Figura 2.3 com três planos ortogonais ao vector  $(1, 0, 1)$ .

Também o vértice  $(40, 0)$  é definido pelas equações

$$\begin{cases} x & = & 40 \\ y & = & 0 \end{cases}$$

correspondentes à inequação (2.8) e a uma das restrições (2.10) de não negatividade das variáveis.

O vértice  $(1, 0, 3)$  do poliedro da Figura 2.3 é a intersecção do plano cinzento, com o verde e com o plano definido pelos vectores  $x_1$  e  $x_3$ , i.e., é a solução do sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \\ & x_3 & = & 3 \\ & x_2 & = & 0 \end{cases}$$

Antes de explicitar a correspondência entre vértices e soluções de sistemas lineares, vamos mostrar que a região admissível de qualquer problema de programação linear pode ser descrita por um sistema de equações lineares com variáveis não negativas.

Começemos por ver que é possível condicionar todas as variáveis a tomar valores não negativos.

Se uma dada variável  $x_j$  está limitada a assumir valores não positivos, i.e., se na formulação está presente a restrição  $x_j \leq 0$ , então tudo o que há a fazer é substituir na formulação a variável  $x_j$  por  $-\bar{x}_j$  e exigir que  $\bar{x}_j \geq 0$ . Desta forma, qualquer que seja o valor  $p > 0$  atribuído a  $\bar{x}_j$ , equivale a fazer  $x_j = -p < 0$ .

Se  $x_j \geq 0$ , i.e., a variável  $x_j$  não tem restrição de sinal, então podemos substituir na formulação a variável  $x_j$  pela diferença  $x_j^1 - x_j^2$  e impor que  $x_j^1, x_j^2 \geq 0$ . Assim,  $x_j$  assume um valor positivo se o valor atribuído a  $x_j^1$  for maior do que o atribuído a  $x_j^2$ . Caso contrário, o valor de  $x_j$  será negativo ou nulo.

Assim, qualquer problema pode ser transformado de forma a que todas as variáveis sejam não negativas.

Note também que uma inequação linear do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$$

pode ser substituída pelas condições

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+1} = b \text{ e } x_{n+1} \geq 0,$$

e que a desigualdade

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b$$

é equivalente a

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n - x_{n+1} = b \text{ e } x_{n+1} \geq 0.$$

Em ambos os casos as desigualdades foram transformadas em equações pela introdução da variável não negativa  $x_{n+1}$ . A essa variável adicional dá-se o nome de *variável de folga*.

Em conclusão, todo o problema de programação linear pode ser apresentado na forma de minimização ou maximização de uma função linear com variáveis não negativas, que satisfazem um sistema de equações lineares. Um problema escrito neste formato diz-se na forma *standard*.

Uma formulação *standard* do problema (2.11)-(2.16) é

$$\begin{array}{l} \text{maximizar} \quad x_1 + 2x_3 \\ \text{sujeito a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \end{array} \quad (2.17)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0, \quad (2.18)$$

em que  $x_4, x_5, x_6, x_7$  são as variáveis de folga.

É óbvia a correspondência entre soluções admissíveis de um dado problema de programação linear e do correspondente problema na forma *standard*. A solução admissível  $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 1, x_5 = 1, x_6 = 1, x_7 = 1$  de (2.17),(2.18) corresponde à solução admissível  $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2$  de (2.11)-(2.16). A solução  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 3, x_5 = 2, x_6 = 3, x_7 = 3$  corresponde a  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$ .

De uma forma geral tem-se o seguinte. Sejam  $P$  um problema de programação linear com  $n$  variáveis não negativas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e

$$Ax = b, \text{ com } x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) \quad (2.19)$$

o sistema de equações do problema *standard* associado. À solução não negativa  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}, \dots, \bar{x}_{n+k})$  de (2.19) corresponde a solução  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  do problema  $P$ .

Vamos admitir que a característica da matriz  $A$  é igual ao número de linhas, que designamos por  $m$ . Seja  $\beta = \{A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_m}\}$  um conjunto de  $m$  colunas de  $A$  linearmente independente. Chama-se *solução básica* à solução que se obtém resolvendo o sistema apenas com as variáveis associadas às colunas de  $\beta$ , e igualando a zero as restantes variáveis. As colunas 4, 5, 6 e 7 da matriz dos coeficientes do sistema (2.17) são linearmente independentes. A solução básica correspondente a essa escolha de colunas é  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 4, x_5 = 2, x_6 = 3, x_7 = 6$ . Também as colunas 2, 5, 6, 7 formam um conjunto de vectores linearmente independente. A correspondente solução básica é  $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 2, x_6 = 3, x_7 = -6$ .

Uma *solução básica* é *admissível* (sba) se não tem componentes negativas. A solução  $(0, 0, 0, 4, 2, 3, 6)$  de (2.17) é básica admissível, a solução básica  $(0, 4, 0, 0, 2, 3, -6)$  é não admissível.

O resultado seguinte estabelece a correspondência entre as sba<sub>s</sub> e os vértices do poliedro do problema original.

**Teorema 2.2** *Sejam  $\mathcal{P}$  o poliedro da admissibilidade de um problema de programação linear com variáveis não negativas e  $Ax = b$  o sistema de equações lineares do problema na forma standard que lhe está associado. Os vértices de  $\mathcal{P}$  e as sba<sub>s</sub> de  $Ax = b$  estão em correspondência biunívoca.*

Na Tabela 2.2 listam-se os vértices do poliedro da Figura 2.3 e as correspondentes sba<sub>s</sub> de (2.17).

Assim, pode obter-se uma solução óptima de um problema de programação linear resolvendo um número finito de sistemas de equações lineares. O método do *simplex* é geralmente bastante eficaz na resolução de problemas de programação linear, ao seleccionar criteriosamente os diferentes sistemas de equações a resolver. Estão disponíveis para utilização implementações do método do *simplex* integradas em programas informáticos para cálculo matemático (ver por exemplo o pacote *simplex* do programa Maxima ou o pacote *linprog* do programa R).

Vértice do poliedro do problema (2.11)-(2.16)	correspondente sba de (2.17)
(0,0,0)	(0,0,0,4,2,3,6)
(0,2,0)	(0,2,0,2,2,3,0)
(2,2,0)	(2,2,0,0,0,3,0)
(2,0,0)	(2,0,0,2,0,3,6)
(2,0,2)	(2,0,2,0,0,1,4)
(1,0,3)	(1,0,3,0,1,0,3)
(0,0,3)	(0,0,3,1,2,0,3)
(0,1,3)	(0,1,3,0,2,0,0)

Tabela 2.2: Vértices do poliedro de admissibilidade do problema (2.11)-(2.16) e correspondentes  $sba_s$  de (2.17).

### EXERCÍCIOS 13

1. Uma câmara municipal pretende rentabilizar um parque de 100 ha destinando-o a área florestal, parque de campismo e reserva de caça. Para a manutenção do parque dispõe anualmente de uma verba de 30000 Euros e de 20000 horas de trabalho. O quadro seguinte indica o capital e horas de trabalho necessários à manutenção anual de cada ha, consoante o tipo de ocupação de solo.

	capital (Euros)	horas de trabalho
floresta	100	100
caça	300	150
campismo	400	500

Prevê-se um lucro anual de 40, 60 e 80 Euros por cada ha de terreno destinado a área florestal, parque de campismo e reserva de caça, respectivamente. Pretende determinar-se o número de ha a destinar a cada tipo de ocupação de solo de forma a maximizar o lucro.

- a) Formule linearmente o problema atribuindo significado às variáveis utilizadas.
- b) Converta à forma *standard* a formulação anterior e indique uma solução básica admissível.
- c) Determine uma solução que proporcione o maior lucro quando 40 ha do terreno são destinados a reserva de caça.

2. Formule e resolva o seguinte problema.

Um distribuidor de cafés vai misturar numa certa proporção os grãos provenientes do Brasil, Quênia e Jamaica, que dispõe em armazém, para fazer dois lotes de café A e B. A composição e o preço de venda de cada um dos lotes, assim como a quantidade existente em armazém de cada um dos tipos de café estão indicados no quadro seguinte.

	lote A	lote B	quant. disponível (kg)
Brasil	0.25	0.25	100
Quênia	0.75	0.25	150
Jamaica	0.0	0.5	175
preço de venda (Euros/Kg)	3.5	5.0	

Sabendo que todo o café será vendido, pretende determinar-se a quantidade de cada um dos lotes a que corresponde a maior receita bruta.

3. Uma fábrica tem que reduzir a emissão dos seus 3 principais poluentes atmosféricos: as partículas, os óxidos sulfúricos e os hidrocarbonetos, em pelo menos 72, 50 e 24 milhares de quilos por ano, respectivamente. Para este efeito a fábrica vai modificar a chaminé, aumentando a altura e/ou a área dos filtros. Estas modificações permitem reduzir a emissão anual dos poluentes nos valores (em milhares de quilos) indicados na tabela seguinte.

---

	Aumentar 1 m altura da chaminé	Aumentar 1 m <sup>2</sup> área dos filtros
Partículas	9	18
Óxidos sulfúricos	10	10
Hidrocarbonetos	12	4

Os custos de aumentar 1 m a altura e 1 m<sup>2</sup> a área dos filtros da chaminé são, respectivamente, 10 e 7 mil euros. A fábrica pretende determinar os valores dos aumentos da altura e da área dos filtros de modo a atingir o objectivo proposto com o menor custo possível.

- a) Formule linearmente o problema, atribuindo significado às variáveis.
  - b) Represente graficamente a região admissível.
  - c) Determine a solução óptima e a correspondente solução básica admissível. Qual é o custo que corresponde a esta solução?
4. Um avião de combate a incêndios florestais pode transportar dois tipos de produtos, P1 e P2. Uma tonelada de P1 ocupa 0.5 m<sup>3</sup>, permite combater uma área de incêndio de 1.5 ha e custa 2000 Euros. Uma tonelada de P2 ocupa 2 m<sup>3</sup>, permite combater uma área de 4 ha e custa 3000 Euros. O peso e espaço reservados para o transporte desses produtos não pode ultrapassar os 1.5 toneladas e 1.0 m<sup>3</sup>. Pretende determinar-se a quantidade a transportar de cada produto de modo a combater incêndios numa área de pelo menos 2.5 ha e minimizando os custos.
- a) Formule linearmente o problema, indicando os signicado das variáveis interve-nientes.
  - b) Mostre que 1 tonelada de P1 e 0.25 toneladas de P2 é uma solução admissível e determine a área de incêndio que esta opção permite combater.

5. Um estabelecimento comercial pretende obter o máximo lucro disponibilizando 150  $m^2$  para armazenar, durante 3 meses, materiais dos tipos A, B, C e D. O processo de armazenagem terá que decorrer em não mais do que 10 horas e o compromisso de armazenar pelo menos 2 toneladas do material A terá que ser respeitado. Cada tonelada de A, B, C e D requer para ser armazenado 1, 4, 1 e 2 horas e ocupa 15, 16, 20 e 30  $m^2$ , respectivamente. São cobrados 200, 300, 400 e 700 Euros, respectivamente, por cada tonelada de A, B, C e D.
- Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.
  - Converta à forma *standard* a formulação anterior e atribua significado às variáveis de folga.
  - Mostre que é admissível a opção que consiste em armazenar 2 toneladas de A, 0 de B, 3 de C e 2 de D, mas não corresponde a um vértice da região admissível.
6. Uma empresa de distribuição foi encarregue de abastecer 3 clientes com uma mercadoria existente nos armazéns A e B. O armazém A pode disponibilizar até 60 toneladas (t) dessa mercadoria e o armazém B até 30 t. O cliente 1 requereu exactamente 20 t. Os clientes 2 e 3 estão dispostos a receber qualquer quantidade da mercadoria, mas a empresa comprometeu-se apenas com o cliente 2 a fornecer-lhe pelo menos 50 t.

A tabela seguinte indica o lucro (em dezenas de euros) resultante da distribuição de uma tonelada de mercadoria de cada armazém para cada um dos clientes.

Armazém	Cliente		
	1	2	3
A	8	5	7
B	6	4	10

---

A empresa pretende determinar a quantidade de mercadoria a transportar de cada armazém para cada cliente de modo a obter o maior lucro.

- a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis.
- b) Verifique que é admissível a opção descrita na tabela seguinte

Armazém	Cliente		
	1	2	3
A	20	40	0
B	0	10	20

Qual é o lucro resultante desta opção?

- c) Converta à forma *standard* a formulação anterior.
  - d) Mostre que a opção da alínea b) corresponde a um vértice da região admissível.
7. Uma empresa decidiu iniciar a produção dos produtos  $P_1$  e  $P_2$ , dispondo para isso de mão-de-obra equivalente a 80 horas semanais. Semanalmente, cada tonelada de  $P_1$  e  $P_2$  dá um lucro de 12 e 8 euros e requer 5 e 2 horas de mão-de-obra, respectivamente. Sabe-se que a procura semanal do produto  $P_1$  é não limitada, mas a de  $P_2$  não ultrapassa as 30 toneladas. A empresa pretende determinar a quantidade a produzir semanalmente de cada produto, de forma a obter o lucro máximo.

- a) Descreva o problema de forma linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.
- b) Represente graficamente a região admissível.
- c) Identifique uma solução óptima e a correspondente solução básica admissível.

- d) Determine os valores que poderá assumir o lucro resultante da venda de cada tonelada de produto  $P_1$  de forma a manter óptima a solução determinada na alínea anterior.

8. Considere o problema de programação linear seguinte.

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} && 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \\ \text{com } x \in \mathcal{P} = \{ & (x_1, x_2, x_3, x_4) : && x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 3 \\ & && x_1 - 2x_3 + x_4 \geq 2 \\ & && x_1 + x_3 \leq 3 \\ & && x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ & && x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \}. \end{aligned}$$

- a) Estabeleça as restrições lineares que definem a região admissível  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^7$  do correspondente problema linear na forma *standard*.
- b) Verifique que  $v = (2, 3, 0, 0)$  é vértice de  $\mathcal{P}$  e indique o valor da função objectivo em  $v$ .

9. Considere o problema

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} && 20x_1 + 30x_2 \\ & \text{sujeito a} && x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ & && x_1 \leq 60 \\ & && x_2 \leq 50 \\ & && x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- a) Represente graficamente a região admissível e as soluções admissíveis a que correspondem valores da função objectivo iguais a 600.
- b) Indique uma solução óptima e a correspondente solução básica admissível.
- c) Se os coeficientes da função objectivo coincidissem e fossem positivos, quais seriam as soluções óptimas?



## Capítulo 3

# Norma, produto interno e ângulo de vectors

Neste capítulo vamos estender a  $\mathbb{R}^m$  as noções conhecidas em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  de norma de um vector, produto interno e ângulo de vectors.

Se  $x = (x_1, x_2)$  é um vector de  $\mathbb{R}^2$ , a norma de  $x$  é  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  (ver Figura 3.1 a)).

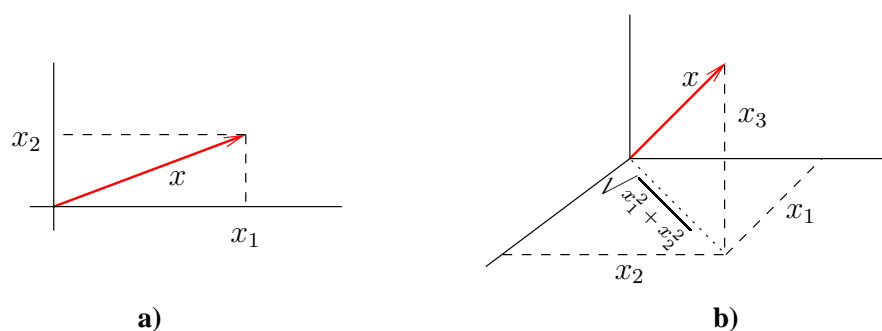


Figura 3.1: Um vector a)  $x = (x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  e b)  $x = (x_1, x_2, x_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Se  $x = (x_1, x_2, x_3)$  é um vector de  $\mathbb{R}^3$ , a norma de  $x$  é  $\|x\| = \sqrt{(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + x_3^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  (ver Figura 3.1 b)).

---

**Definição 10** Se  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  é um vector de  $\mathbb{R}^m$ , a *norma* de  $x$  é

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}.$$

EXEMPLOS 18

1.  $\|(0, 1, 2)\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$

2.  $\|(1, -1, 1, 2)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{7}.$

A norma verifica as seguintes propriedades.

**Proposições 3.1**

1.  $\|x\| \geq 0$  e  $\|x\| = 0$  sse  $x = \vec{0}$ .

2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

Chama-se *vector unitário* a um vector de norma igual a 1. Note que se  $x$  é um vector não nulo,  $\frac{x}{\|x\|}$  é um vector unitário, colinear e com o mesmo sentido do que  $x$ . Diz-se que  $\frac{x}{\|x\|}$  é o *versor* do vector  $x$ . Os versores dos vectores  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  e  $(0, 1, 2)$  são  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  e  $(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ , respectivamente.

Se  $x$  e  $y$  são vectores de  $\mathbb{R}^2$ , a distância entre  $x$  e  $y$ , é  $d(x, y) = \|x - y\|$  (ver Figura 3.2).

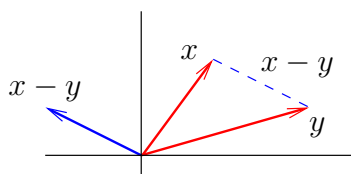


Figura 3.2: Vectores  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{R}^2$  e o vector  $x - y$ .

**Definição 11** Se  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  são vectores de  $\mathbb{R}^m$ , a *distância* entre  $x$  e  $y$  é

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}.$$

### CAPÍTULO 3. NORMA, PRODUTO INTERNO E ÂNGULO DE VECTORES

---

EXEMPLO 19 A distância entre os vectores  $(1, 2, 0, -1)$  e  $(2, 0 - 2, -1)$  é  $\|(-1, 2, 2, 0)\| = \sqrt{1 + 4 + 4 + 0} = 3$ .

OBSERVAÇÃO 6 A norma de um vector  $x$ ,  $\|x\| = \|x - \vec{0}\|$ , é a distância de  $x$  à origem.

Consideremos os vectores  $x = (x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_1, y_2, y_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Tem-se o seguinte

$$\|x - y\|^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3). \quad (3.1)$$

Isto é, o quadrado da distância entre  $x$  e  $y$  é a soma dos quadrados das normas menos o dobro de  $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ . Suponhamos que  $x$  e  $y$  são vectores não nulos e ortogonais (ver Figura 3.3). Nesse caso, por aplicação do Teorema de Pitágoras, tem-se

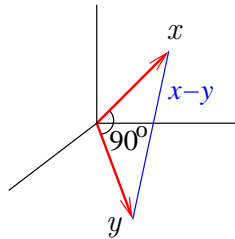


Figura 3.3: Dois vectores  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{R}^3$  ortogonais.

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad (3.2)$$

Combinando as expressões (3.1) e (3.2) temos a condição de ortogonalidade para vectores de  $\mathbb{R}^3$ :  $x \perp y$  sse  $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$ . Ao escalar  $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$  dá-se o nome de produto interno ou escalar dos vectores  $x$  e  $y$ . Vamos generalizar a  $\mathbb{R}^m$  estes dois conceitos.

**Definição 12** Dois vectores  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  de  $\mathbb{R}^m$ , dizem-se *ortogonais* e representa-se por  $x \perp y$ , se  $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_my_m = 0$ .

EXEMPLOS 20 Os seguintes pares de vectores são ortogonais.

- 
1.  $(1, 1, 0, 1)$  e  $(1, -1, 3, 0)$ .
  2.  $(-2, 1, 0, 3, -1)$  e  $(2, 1, 2, \frac{1}{3}, -2)$ .

**Definição 13** Sejam  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  vectores de  $\mathbb{R}^m$ . Chama-se *produto interno* (ou escalar) de  $x$  e  $y$  ao escalar

$$x|y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_my_m.$$

OBSERVAÇÃO 7  $x|y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_my_m = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = x^\top y.$

É fácil verificar que o produto interno satisfaz as seguintes propriedades.

**Proposições 3.2**

1.  $x|y = y|x.$
2.  $x|(y + z) = x|y + x|z.$
3.  $\lambda(x|y) = \lambda x|y = x|\lambda y.$
4.  $x|x = \|x\|^2.$
5.  $x|x = 0$  sse  $x = \vec{0}$  ( $\vec{0}$  é o único vector ortogonal a si mesmo).

OBSERVAÇÃO 8 Como  $\|x+y\|^2 = (x+y)|(x+y) = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$ , tem-se  $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$  sse  $x|y = 0$ , que é o enunciado do Teorema de Pitágoras em  $\mathbb{R}^m$ .

A inequação que se apresenta de seguida relaciona o produto interno com o produto das normas, é considerada uma das desigualdades mais importantes em Álgebra Linear.

**Teorema 3.3** (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz.*) Para quaisquer vectores  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{R}^m$  tem-se  $|x|y| \leq \|x\|\|y\|$ , com igualdade sse  $x$  e  $y$  são colineares.

### CAPÍTULO 3. NORMA, PRODUTO INTERNO E ÂNGULO DE VECTORES

---

Demonstração: Se  $x = \vec{0}$  ou  $y = \vec{0}$ , tem-se  $x|y = \|x\|\|y\| = 0$  e nada mais há a provar.

Consideremos pois que os vectores  $x$  e  $y$  são ambos não nulos.

A chave da prova é a desigualdade seguinte, que é válida para todo o escalar  $\lambda$ .

$$\|x\|^2 - 2\lambda x|y + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0. \quad (3.3)$$

De facto,  $\|x\|^2 - 2\lambda x|y + \lambda^2\|y\|^2 = (x - \lambda y)|(x - \lambda y) = \|x - \lambda y\|^2 \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

Substituindo na inequação (3.3)  $\lambda$  por  $\frac{x|y}{\|y\|^2}$ , tem-se  $\|x\|^2 - 2\frac{(x|y)^2}{\|y\|^2} + \frac{(x|y)^2}{\|y\|^4}\|y\|^2 \geq 0 \Rightarrow \|x\|^2 - \frac{(x|y)^2}{\|y\|^2} \geq 0 \Rightarrow \|x\|^2\|y\|^2 \geq (x|y)^2 \Rightarrow \|x\|\|y\| \geq |x|y|$ , ficando assim provada a primeira parte do teorema.

Se os vectores  $x$  e  $y$  não são colineares, i.e.,  $x \neq \lambda y, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \|x - \lambda y\|^2 > 0$  e portanto  $\|x\|\|y\| > |x|y|$ .

Se  $x = \alpha y$ , para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então  $|x|y| = |\alpha y|y| = |\alpha|\|y\|^2 = |\alpha|\|y\|\|y\| = |\alpha|\|\frac{1}{\alpha}x\|\|y\| = |\alpha|\frac{1}{|\alpha|}\|x\|\|y\| = \|x\|\|y\|$ .  $\square$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz facilmente se deduz o seguinte resultado conhecido por desigualdade triangular.

**Teorema 3.4** (Desigualdade  $\Delta_{\text{lar}}$ .) Para todo o par de vectores  $x, y \in \mathbb{R}^m$ ,  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Demonstração:  $\|x + y\|^2 = (x + y)|(x + y) = \|x\|^2 + 2x|y + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ . Logo,  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .  $\square$

Recorde que o ângulo  $\theta$  entre dois vectores não nulos  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{R}^2$  é definido por  $\cos \theta = \frac{x|y}{\|x\|\|y\|}$  e  $\theta \in [0, \pi]$ .

Para vectores não nulos  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{R}^m$ , a desigualdade Cauchy-Schwarz  $|x|y| \leq \|x\|\|y\|$  é equivalente a  $-1 \leq \frac{x|y}{\|x\|\|y\|} \leq 1$ . É pois legítimo associar à razão  $\frac{x|y}{\|x\|\|y\|}$  o coseno de um ângulo e assim generalizar a noção de ângulo entre vectores.

**Definição 14** O *ângulo* entre dois vectores  $x, y \in \mathbb{R}^m$  é o ângulo  $\theta \in [0, \pi]$ , tal que  $x|y = \|x\|\|y\| \cos \theta$ .

---

OBSERVAÇÃO 9  $x, y \neq \vec{0}, x|y = \|x\|\|y\| \cos \theta = 0$  ( $x \perp y$ ) sse  $\cos \theta = 0$ , i.e.,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

EXEMPLO 21 O ângulo entre  $x = (1, 1, 0, 1)$  e  $y = (1, 1, 1, 1)$  é  $\theta = \arccos \frac{x|y}{\|x\|\|y\|} = \arccos \frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{4}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{6}\pi$ .

#### EXERCÍCIOS 14

1. Calcule as normas dos seguintes vectores.

- a)  $(1, -1, 2)$                       b)  $(-1, 0, \pi, 0)$                       c)  $(5, 0, 1, 0, 1, 3)$ .

2. Calcule as distância entre os seguintes pares de vectores.

- a)  $(1, -1, 2)$  e  $(0, -1, 0)$                       b)  $(-1, 0, 2, 0)$  e  $(1, 0, 0, 1)$   
c)  $(5, 0, 1, 0, 1, 3)$  e  $(-1, 2, 0, 1, 1, 0)$ .

3. Determine todos os vectores unitários que fazem ângulos de  $\frac{\pi}{3}$  com cada um dos seguintes pares de vectores.

- a)  $(1, 0, 0)$  e  $(0, 1, 0)$                       b)  $(1, 0, 1)$  e  $(0, 1, 0)$ .

4. Identifique um vector não nulo que seja ortogonal a ambos os vectores de cada um dos seguintes pares.

- a)  $(1, 0, 1)$  e  $(1, 1, -1)$                       b)  $(1, -1, 2)$  e  $(2, 1, -1)$ .

5. Sejam  $x$  e  $y$  vectores de  $\mathbb{R}^m$ . Prove os seguintes resultados.

- a)  $\|x + y\| = \|x - y\|$  sse  $x$  e  $y$  são ortogonais.  
b) Os vectores  $x - y$  e  $x + y$  são ortogonais sse  $\|x\| = \|y\|$ .  
c) Se  $x$  e  $y$  são ortogonais, então  $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ .  
d) Se  $x$  e  $y$  são unitários e ortogonais, então  $\|x - y\| = \sqrt{2}$ .

6. Uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  diz-se *ortogonal* se as colunas são unitárias e quaisquer duas colunas distintas são ortogonais. Prove os seguintes resultados.

*CAPÍTULO 3. NORMA, PRODUTO INTERNO E ÂNGULO DE VECTORES*

---

- a) A matriz  $A$  é ortogonal sse  $A^{-1} = A^{\top}$ .
- b) Se a matriz  $A$  é ortogonal, então é simétrica sse  $A^2 = I$ .



# Capítulo 4

## Valores e vectores próprios

Neste capítulo vamos estudar os valores e vectores próprios de matrizes quadradas. Antes vamos introduzir a noção de determinante de uma matriz.

### 4.1 Determinantes

Vamos associar a cada matriz quadrada um valor que se define da seguinte forma.

**Definição 15** Sejam  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $A'$  a matriz em escada que se obtém de  $A$  por aplicação da fase descendente do método de eliminação de Gauss, utilizando exclusivamente as operações elementares de troca de linhas e substituição de uma linha por soma desta com um múltiplo de outra linha. Chama-se *determinante* de  $A$  e representa-se por  $\det A$  ou  $|A|$ , o valor

$$\det A = |A| = \delta a'_{11} a'_{22} \cdots a'_{nn},$$

em que  $a'_{11}, a'_{22}, \dots, a'_{nn}$  são os elementos da diagonal principal da matriz  $A'$  e

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{se é par o n}^\circ \text{ de trocas de linhas efectuadas no processo } A \rightarrow \cdots A', \\ -1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

## EXEMPLOS 22

$$1. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = A' \text{ e portanto } \det A = 1 \times (-3) = -3.$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = A' \text{ e portanto } \det A = -1 \times (-3) \times 5 = 15.$$

$$3. \text{ De uma forma geral, tem-se } \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$4. A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 34 \end{bmatrix} = A'$$

e portanto  $\det A = -1 \times (-1) \times 1 \times 34 = 34$ .

$$5. A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A' \text{ e portanto } \det A =$$

$1 \times (-2) \times 0 = 0$ .

## EXERCÍCIOS 15 Prove os seguintes resultados.

1. O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.
2. Uma matriz com uma linha ou uma coluna de zeros tem determinante igual a zero.
3. É nulo o determinante de uma matriz com linhas proporcionais.

Os determinantes satisfazem a seguinte propriedade.

**Proposição 4.1** *Se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas da mesma ordem, tem-se  $\det(AB) = \det A \det B$ , i.e., o determinante do produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes.*

É claro que não poderá haver grandes expectativas relativamente à quantidade de informação que o determinante contém da matriz. De facto, não é razoável admitir que um único valor possa reter muito conhecimento sobre os  $n^2$  elementos de uma matriz de ordem  $n$ . No entanto, o determinante permite caracterizar a invertibilidade de matrizes.

**Proposição 4.2** *Uma matriz quadrada  $A$  é invertível sse  $\det A \neq 0$ . Se a matriz  $A$  é invertível, então  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .*

Demonstração: É sabido que uma matriz quadrada  $A$  é invertível sse todas as colunas de  $A'$ , a matriz em escada obtida aplicando a  $A$  a fase descendente do método de Gauss, têm pivots. Como os pivots são os elementos não nulos da diagonal principal de  $A'$  e  $\det A$  é, a menos do sinal, o produto dos elementos da diagonal principal de  $A'$ , tem-se  $\det A \neq 0$  sse  $A$  é invertível.

Se  $A$  é invertível,  $\det(AA^{-1}) = 1 = \det A \det A^{-1}$ , donde se conclui que  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .

□

Vamos agora apresentar uma forma alternativa de calcular o determinante. Para isso precisamos da seguinte definição.

**Definição 16** Chama-se *complemento algébrico* ou *co-factor* do elemento  $(i, j)$  da matriz  $A$  e representa-se por  $\Delta_{ij}$  o valor  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ , em que  $A_{ij}$  é o determinante da matriz que se obtem de  $A$  eliminando a linha  $i$  e a coluna  $j$ .

EXEMPLO 23 Se  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $\Delta_{11} = (-1)^2 \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 15$ ,  $\Delta_{21} = (-1)^{2+1}$

$\det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = (-1) \times 24 = -24$ .

**Teorema 4.3** (Teorema de Laplace) *Sejam  $i$  e  $j$ , respectivamente, uma linha e uma coluna arbitrárias da matriz  $A$  de ordem  $n$ . Tem-se*

$$\det A = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}.$$

EXEMPLOS 24

$$1. \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 2 \times 19 - 3 \times 4 - (-8) = 34.$$

$$2. \det \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -2 \det \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -2 \times 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -2 \times 2 \times (-5) = 20.$$

Terminamos esta secção com uma curiosa aplicação dos determinantes, que nos vai permitir obter de forma expedita um vector que é ortogonal a cada um de dois vectores dados de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 17** Sejam  $x = (x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_1, y_2, y_3)$  vectores de  $\mathbb{R}^3$ . Chama-se *produto externo* de  $x$  e  $y$  e representa-se por  $x \times y$ , o vector de  $\mathbb{R}^3$

$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1).$$

O vector  $x \times y$  pode ser memorizado “aplicando” da seguinte forma o Teorema de Laplace

à “matriz”  $\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$ , em que  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Tem-se pois,

$$x \times y = \text{“det} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \text{”} = \det \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

EXEMPLO 25  $(1, -2, 0) \times (1, 0, 1) = \text{“det} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{”} = (-2, -1, 2).$

**Proposição 4.4** *Sejam  $x = (x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_1, y_2, y_3)$  vectores de  $\mathbb{R}^3$ . O produto externo de  $x$  e  $y$  é um vector ortogonal a  $x$  e a  $y$ .*

Demonstração: Note que se  $z = (z_1, z_2, z_3)$  é um vector de  $\mathbb{R}^3$ , tem-se

$$z|x \times y = z_1 \det \begin{bmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{bmatrix} - z_2 \det \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{bmatrix} + z_3 \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}.$$

Assim,  $x|x \times y$  é o determinante de uma matriz com duas linhas iguais, logo igual a 0 e portanto  $x \perp x \times y$ . O mesmo raciocínio permite concluir que  $y|x \times y = 0$ , i.e.,  $y \perp x \times y$ .

□

#### EXERCÍCIOS 16

1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes indicando se é invertível.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} & \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} & \text{c) } \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{e) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} & \text{f) } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

2. Utilizando a noção de produto externo, indique

- a) um vector ortogonal aos vectores  $u = (1, 1, 2)$  e  $v = (1, 0, 1)$ ,  
 b) uma equação cartesiana do plano definido por

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 1, 2) + \mu(1, 0, 1), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. Sejam  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto de  $\mathbb{R}^3$  e  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3)$  vectores

linearmente independentes de  $\mathbb{R}^3$ . Mostre que a equação

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

define o plano que passa no ponto  $P_0$  e que contém as direcções dos vectores  $u$  e  $v$ .

## 4.2 Vectores e valores próprios

**Definição 18** Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Um vector  $v$  não nulo de  $\mathbb{R}^n$  é *vector próprio* de  $A$  se existir um número  $\lambda$  tal que  $Av = \lambda v$ . O número  $\lambda$  chama-se *valor próprio* associado ao vector próprio  $v$ .

EXEMPLO 26  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Diz-se pois que  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  é vector próprio da matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  e 3 é o valor próprio associado.

A equação matricial  $Ax = \lambda x$  é equivalente a  $Ax - \lambda Ix = 0$ , que se pode escrever na forma

$$(A - \lambda I)x = 0, \tag{4.1}$$

e cujo conjunto de soluções se representa-se por  $E(\lambda)$ .

Podemos pois concluir o seguinte.

**Proposição 4.5** *Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ .*

1.  $\lambda$  é valor próprio de  $A$  sse existem soluções não nulas do sistema homogéneo (4.1), i.e.,  $E(\lambda) \neq \{\vec{0}\}$ ,
2. se  $\lambda$  é valor próprio de  $A$ , os vectores próprios associados a  $\lambda$  são as soluções não nulas do sistema homogéneo (4.1), i.e., os vectores não nulos de  $E(\lambda)$ .

EXEMPLO 27 Consideremos a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ .

Para decidir se 2 é valor próprio de  $A$ , vamos ver se existem soluções não nulas do sistema homogéneo (4.1), com  $\lambda = 2$ . Aplicando a fase descendente do método de Gauss à matriz  $A - 2I$ , tem-se

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz em escada obtida tem colunas sem *pivots*, podemos concluir que o sistema (4.1) tem soluções não nulas, i.e.,  $E(2) \neq \{\vec{0}\}$ , e que portanto 2 é valor próprio de  $A$ .

Os vectores próprios associados ao valor próprio 2 são as soluções não nulas do sistema  $(A - 2I)x = \vec{0}$ , que se identificam aplicando a fase ascendente do método de Gauss à matriz em escada obtida anteriormente. Assim,

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e portanto } E(2) = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3) : \begin{array}{l} v_1 = \forall \\ v_2 = v_3 \\ v_3 = \forall \end{array} \right\}.$$

De facto, se  $v$  é um qualquer vector de  $E(2)$ , i.e.,  $v = (a, b, b)$  tem-se

$$Av = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \\ 2b \end{bmatrix} = 2v.$$

O ponto 2 da Proposição 4.5 indica como se podem identificar os vectores próprios associados a cada valor próprio. Vamos agora ver como é que se determinam os valores próprios.

Atendendo ao ponto 1 da Proposição 4.5,  $\lambda$  é valor próprio da matriz  $A$  sse o sistema homogéneo  $(A - \lambda I)x = 0$  é indeterminado, que como sabemos é equivalente à não

## 4.2. VECTORES E VALORES PRÓPRIOS

---

existência de inversa da matriz  $A - \lambda I$ , ou ainda ao facto do determinante de  $A - \lambda I$  ser igual a zero. Tem-se pois o seguinte resultado.

**Proposição 4.6**  $\lambda$  é valor próprio de  $A$  sse  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

Assim, os valores próprios de  $A$  são os valores de  $\lambda$  que anulam a função  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ . Vamos ver que esta função  $p(\lambda)$  é um polinómio na variável  $\lambda$ .

Se  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  é uma matriz genérica de ordem 2,  $A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}$  e  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  é um polinómio de grau 2.

Se  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  é uma matriz de ordem 3,  $A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda) \det \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} - a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} + a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} - \lambda \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Uma vez que o 1º termo é um polinómio de grau 3 e os 2º e 3º termos são polinómios de grau 1,  $p(\lambda)$  é um polinómio de grau 3.

Repetindo este raciocínio para matrizes genéricas de ordens 4, 5, ..., conclui-se o seguinte.

**Proposição 4.7** Se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , a função  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  é um polinómio de grau  $n$ , que se chama polinómio característico de  $A$ .

Os valores próprios são portanto os zeros do polinómio característico.

EXEMPLOS 28

1. Para determinar os valores próprios da matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  considera-se o polinómio característico

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 1) = (1 - \lambda)(-\lambda)(2 - \lambda).$$

Os valores próprios de  $A$  são 0, 1 e 2, pois são os valores de  $\lambda$  que anulam o polinómio característico.

2. O polinómio característico da matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  é

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 1).$$

Os valores próprios de  $A$  são  $\lambda = 1$  e os zeros de  $\lambda^2 + 1$ , que são os números imaginários  $i$  e  $-i$ .

Uma matriz  $A$  de ordem  $n$  tem  $n$  valores próprios, reais e/ou complexos, distintos ou não. O número de vezes que  $\lambda$  aparece como zero do polinómio é a multiplicidade algébrica de  $\lambda$ . Assim, por exemplo, os zeros de  $(2 - \lambda)^2 \lambda (1 + \lambda)^3$  são 2, 0 e  $-1$  com multiplicidades algébricas iguais a 2, 1 e 3, respectivamente.

Note que em cada um dos Exemplos 28 a soma dos valores próprios é igual à soma dos elementos da diagonal principal da matriz  $A$ . Também o determinante de cada matriz e o produto dos correspondentes valores próprios são iguais. Tal facto não é uma coincidência, como estipulam os dois resultados seguintes, que permitem de alguma forma averiguar eventuais erros cometidos no cálculo dos valores próprios.

## 4.2. VECTORES E VALORES PRÓPRIOS

---

**Proposição 4.8** *Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  os valores próprios de uma matriz  $A$  de ordem  $n$ .*

1. *A soma dos valores próprios é igual ao traço da matriz, i.e.,  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ .*
2. *O produto dos valores próprios é igual ao determinante da matriz, i.e.,  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = \det A$ .*

Resulta directamente do ponto 2 da Proposição 4.8 a seguinte caracterização da invertibilidade de matrizes em termos de valores próprios.

**Proposição 4.9** *Uma matriz é singular sse zero é valor próprio.*

### EXERCÍCIOS 17

1. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ .

- a) Verifique que  $(1, 5, 10)$  é vector próprio.
- b) Verifique que 1 é valor próprio.

2. Determine os valores próprios e correspondentes vectores próprios de cada uma das seguintes matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & a \end{bmatrix}$ , com  $a \in \mathbb{R}$ .

- Determine os valores do parâmetro  $a$  para os quais a matriz  $A$  admite o valor próprio zero.
- Para cada um dos valores de  $a$  obtidos na alínea anterior calcule os valores próprios de  $A$  e identifique os correspondentes vectores próprios.
- Discuta, em função do parâmetro  $a$ , a invertibilidade da matriz  $A$ .

4. Seja  $v$  um vector próprio associado ao valor próprio  $\lambda$  de uma matriz  $A$ .

- Mostre que, para todo o real  $\alpha$ ,  $v$  é um vector próprio da matriz  $A - \alpha I$  e indique o valor próprio associado.
- Mostre que, para todo o inteiro  $n$ ,  $v$  é vector próprio da matriz  $A^n$  e indique o valor próprio associado.

5. Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

- Calcule o ângulo formado pelas 1ª e 2ª colunas de  $A$ .
- Diga, justificando, se as colunas de  $A$  formam um conjunto linearmente independente.
- Identifique um vector não nulo de  $\mathbb{R}^3$  que seja ortogonal simultaneamente à 1ª e à 2ª colunas de  $A$ .
- Indique um vector  $b$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que o sistema  $Ax = b$  seja impossível.
- Verifique que  $-1$  é valor próprio de  $A$  e determine os vectores próprios associados a  $-1$ .