

Matemática e Informática

MATRIZES E VECTORES (SOLUÇÕES)



INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

- 2008 -

Capítulo 1

Cálculo matricial

1.1 Sistemas de equações lineares

EXERCÍCIOS 1

1. Para que valores de b o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ 4x_1 + 6x_2 = b \end{cases}$$

é impossível?

Solução: $b \neq 8$.

2. Indique uma equação a juntar a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

de forma a obter um sistema impossível.

Solução: Por exemplo, $3x_1 + 2x_3 = 5$.

EXERCÍCIOS 2 Resolva cada um dos seguintes sistemas de equações lineares.

$$1. \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 10 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

Solução: $x_1 = \frac{40}{3}, x_2 = \frac{10}{3}, x_3 = -\frac{20}{3}$.

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$$

Solução: $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 1$.

$$3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Solução: x_4 é uma variável livre e $x_1 = 1 - 5x_4, x_2 = 2 + 2x_4, x_3 = -1$.

$$4. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Solução: x_2 e x_5 são variáveis livres e $x_1 = 13 - 2x_2 + 8x_5, x_3 = -5 - 3x_5, x_4 = 4 + 2x_5$

$$5. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

Solução: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2, x_4 = 3$.

EXERCÍCIOS 3

1. Discuta, para todos os valores dos parâmetros, cada um dos seguintes sistemas.

$$\text{a) } \begin{cases} x - z = 1 \\ y + az = 0 \\ -x + y + 2az = 1 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ -1 & 1 & 2a & 1 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 2 \end{array} \right]$$

Se $a = 1$ o sistema é impossível. Caso contrário, i.e. se $a \neq 1$, o sistema é determinado.

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 = \gamma \\ x_1 + \gamma x_2 + \gamma x_3 = 1 \end{cases}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \gamma \\ 1 & \gamma & \gamma & 1 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma) \end{array} \right]$$

O sistema é determinado para qualquer valor de γ .

$$\text{c) } \begin{cases} ax + 2z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & b & 3 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 3 \\ 0 & 4 & -b & -2 \\ 0 & 0 & 2 - \frac{ab}{2} & 2 - 2a \end{array} \right]$$

Se $ab = 4$ e $a = 1$ o sistema é indeterminado. Se $ab = 4$ e $a \neq 1$ o sistema é impossível. Se $ab \neq 4$ então o sistema é determinado.

$$d) \begin{cases} 2x & + 4y + bz & = 2 \\ x + (d+2)y & & = 1 \\ x & + 2y + bz & = 1 \\ x & + 2y & = c \end{cases}, \quad b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & b & 2 \\ 1 & d+2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & b & 1 \\ 1 & 2 & 0 & c \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & b & 2 \\ 0 & d & -b/2 & 0 \\ 0 & 0 & b/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c-1 \end{array} \right]$$

Se $d = 0$ então

se $c \neq 1$ o sistema é impossível;

se $c = 1$ então

se $b = 0$ é possível e indeterminado com duas variáveis livres;

se $b \neq 0$ é possível e indeterminado com uma variável livre.

Se $d \neq 0$ então

se $c \neq 1$ o sistema é impossível;

se $c = 1$ então

se $b = 0$ é possível e indeterminado com uma variável livre;

se $b \neq 0$ é possível e determinado.

2. Seja S um sistema de equações lineares do tipo $m \times n$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

a) Se $m < n$, então S é indeterminado.

Solução: Falso, pois S pode ser impossível. Exemplo: considerar dois planos paralelos e não coincidentes em \mathbb{R}^3 .

b) Se S é possível e $m < n$, então é indeterminado com exactamente $n - m$ variáveis livres.

Solução: Falso pois S pode ter mais do que $n - m$ variáveis livres. Exemplo: considerar dois planos coincidentes em \mathbb{R}^3 .

c) Se $m > n$, então S é impossível.

Solução: Falso. Exemplo: considerar três rectas em \mathbb{R}^2 que se intersectam num ponto.

d) Se S é possível e $m > n$, então S é determinado.

Solução: Falso pois pode ser indeterminado. Exemplo trivial: considerar três rectas coincidentes em \mathbb{R}^2 .

e) Se S é possível e $m = n$, então S é determinado.

Solução: Falso. Exemplo trivial: considerar duas rectas coincidentes em \mathbb{R}^2 .

1.2 Matrizes e vectores

EXERCÍCIOS 4

1. Discuta e interprete geometricamente o sistema de equações lineares correspondente a cada uma das seguintes matrizes ampliadas.

$$\text{a) } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 3 \end{array} \right]$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

O sistema é impossível. Corresponde a quatro rectas em \mathbb{R}^2 que não se intersectam num mesmo ponto.

$$\text{b) } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8/5 \\ 0 & 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 8/5 \end{array} \right]$$

O sistema é possível e determinado. Corresponde a três planos em \mathbb{R}^3 que se intersectam num único ponto.

$$c) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right].$$

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

O sistema é possível e indeterminado. Corresponde a três planos em \mathbb{R}^3 que se intersectam sobre uma recta.

2. Considere os sistemas de equações lineares cujas correspondentes matrizes ampliadas são

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & a & b_2 \\ -1 & 1 & 2a & b_3 \end{array} \right], \text{ com } a, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

- a) Para que valores de a os sistemas são possíveis, independentemente dos valores dos parâmetros b_1, b_2, b_3 ?

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & a & b_2 \\ -1 & 1 & 2a & b_3 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & a & b_2 \\ 0 & 0 & a-1 & b_3 + b_1 - b_2 \end{array} \right]$$

Se $a \neq 1$ os sistemas são possíveis.

- b) Para que valores de b_1, b_2, b_3 os sistemas são possíveis, independentemente do valor do parâmetro a ?

Solução: Se $b_3 + b_1 - b_2 = 0$ os sistemas são possíveis.

c) Atribua a a, b_1, b_2, b_3 valores que façam o sistema

c1) impossível, **Solução:** $a = 1$ e $b_3 + b_1 - b_2 \neq 0$.

c2) indeterminado. **Solução:** $a = 1$ e $b_3 + b_1 - b_2 = 0$.

3. É correcto afirmar que um sistema de equações lineares do tipo $n \times n$ é possível e determinado se e só se a matriz reduzida que se obtém quando se aplica o método de Gauss à matriz dos coeficientes é a matriz identidade? Justifique.

Solução: Sim. Se a matriz reduzida é a matriz identidade, então o sistema é obviamente possível e determinado. Se a matriz reduzida não é a matriz identidade, então existe pelo menos uma linha nula na matriz reduzida. Nesse caso o sistema só poderá ser impossível ou indeterminado.

4. Seja E uma matriz em escada do tipo $m \times n$.

a) Quantos *pivots* podem existir em E ?

Solução: O número máximo de pivots da matriz é $\min\{m, n\}$ pois em cada linha há no máximo um pivot e em cada coluna há no máximo um pivot.

b) Qual é a relação entre o número de *pivots* e o número de linhas nulas de E ?

Solução: O número de pivots é igual ao número de linhas não nulas de E . Portanto o número de pivots é igual à diferença entre m e o número de linhas nulas de E .

1.3 Operações com matrizes

EXERCÍCIOS 5

1. Para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

calcule, sempre que possível, o valor de cada uma das seguintes expressões.

a) $(5A - A) - (B - 2B)$

Solução: $\begin{bmatrix} 17 & 0 & 1 \\ 10 & 25 & 0 \end{bmatrix}$

b) $(2A - B)^T - C$

Solução: $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 18 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

c) $(2(A^T - C)^T + B)^T$

Solução: $\begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 0 & 13 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

d) $(B^T - C)^T + 2B^T$

Solução: Não está definido.

e) $D + D^T$

Solução: $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

f) $D - D^\top$.

Solução: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Identifique, se existirem, escalares α e β tais que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}.$$

Solução: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & -12 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$

A solução é $\alpha = -3$ e $\beta = 1/2$.

EXERCÍCIOS 6

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $Ab + Ib$, $(A + I)b$, $(A + A^\top)2b$ e $b^\top b$.

Solução: $Ab + Ib = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 10 \end{bmatrix}$, $(A + I)b = Ab + Ib = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 10 \end{bmatrix}$,

$$(A + A^T)2b = \begin{bmatrix} 32 \\ -30 \\ 28 \end{bmatrix}, \quad b^T b = 14.$$

b) Resolva a equação matricial $Ax = 3x + b$, com $x \in \mathbb{R}^3$.

Solução: $Ax = 3x + b \Leftrightarrow (A - 3I)x = b.$ $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & -4 & -2 & | & 2 \\ 2 & -2 & 0 & | & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3/10 \\ 0 & 1 & 0 & | & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7/5 \end{bmatrix}.$ A solução é $x_1 = 3/10$, $x_2 = -6/5$ e $x_3 = 7/5$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e o vector genérico de \mathbb{R}^2 $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

a) Calcule, em função de x e y , o vector Av e represente geometricamente v e Av .

Solução: $Av = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}.$

b) Qual é a relação entre os vectores v e Av ?

Solução: Os vectores v e Av são perpendiculares.

3. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e o sistema homogéneo $(A - \lambda I)x = \vec{0}$, com $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

e $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Para que valores de λ o sistema é indeterminado?

Solução: Para $\lambda = -1$ e $\lambda = 2$.

b) Mostre que se $v \in \mathbb{R}^3$ é solução do sistema, então $Av = \lambda v$.

Solução: $(A - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow Av - \lambda Iv = 0 \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow Av = \lambda v$.

c) Resolva o sistema considerando $\lambda = -1$. Interprete geometricamente o conjunto das soluções e a relação estabelecida na alínea b).

Solução:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

O conjunto de soluções é $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -x_3, x_2 = -x_3, x_3 = \forall\}$. O lugar geométrico das soluções é a recta em \mathbb{R}^3 com a direcção do vector $(-1, -1, 1)$.

4. Justifique que, se A é uma matriz com n colunas e l é o número de variáveis livres do conjunto de soluções do sistema $Ax = 0$, tem-se $l + \text{car } A = n$.

Solução: $\text{car } A$ é o número de colunas com *pivot* da matriz em escada que se obtém aplicando a fase descendente do método de Gauss a A e l corresponde ao número de colunas sem *pivot* dessa matriz.

5. Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Mostre que as proposições seguintes são equivalentes.

a) O sistema $Ax = b$ é possível para todo o vector b de \mathbb{R}^m .

b) $\text{car } A = m$.

Solução: $Ax = b$ é possível para qualquer $b \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow$ não existem linhas nulas na matriz em escada que se obtém aplicando o método de Gauss a $A \Leftrightarrow$ número de colunas com *pivot* dessa matriz é $m \Leftrightarrow \text{car}(A) = m$.

EXERCÍCIO 7 Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calcule, se possível, AB , BA , BA^\top , CC , AA^\top , $a^\top a$ e aa^\top .

Solução: $AB = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 \\ -11 & -2 & 9 \end{bmatrix}$, BA não está definida, $BA^\top = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$,

$CC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $AA^\top = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$, $a^\top a = 14$, e aa^\top não está definida.

EXERCÍCIO 8 Calcule B^3 com $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução: $B^3 = \begin{bmatrix} 20 & -4 & -1 \\ 10 & 8 & -23 \\ 15 & 10 & 10 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIO 9 Verifique que $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

Solução: Verificar que o produto das duas matrizes é a matriz identidade.

EXERCÍCIO 10 Prove os seguintes resultados:

1. Uma matriz não singular tem uma única inversa.

Solução: Seja A a matriz não singular e sejam A' e A'' duas inversas de A . Então $AA' - AA'' = I - I = 0 \Rightarrow A(A' - A'') = 0 \Rightarrow A'A(A' - A'') = A'0 \Rightarrow A' - A'' = 0 \Rightarrow A' = A''$.

2. Se A e B são matrizes não singulares da mesma ordem, então AB é não singular e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (a inversa do produto é o produto das inversas por ordem inversa).

Solução: $B^{-1}A^{-1}$ é de facto a inversa de AB pois $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$.

3. $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, para $k \in \mathbb{Z}_0^+$.

Solução: $(A^{-1})^k$ é de facto a inversa de A^k pois $A^k(A^{-1})^k = A \dots AA^{-1} \dots A^{-1} = I$.

4. $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$.

Solução: $(A^{-1})^\top$ é de facto a inversa de A^\top pois $(A^{-1})^\top A^\top = (AA^{-1})^\top = I^\top = I$.

EXERCÍCIOS 11

1. Determine, caso exista, a inversa de cada uma das seguintes matrizes.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução: As respostas são, respectivamente, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix}$, não é

invertível, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & -8 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, e $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 1 & 1/4 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ é não singular e utilize A^{-1} para resolver o

sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solução: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 11/8 & -3/8 & -1/8 \\ -9/8 & 1/8 & 3/8 \\ 3/4 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$. A solução é $x = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/8 \\ -1/8 \\ -1/4 \end{bmatrix}$.

3. Sejam A , B e C matrizes invertíveis da mesma ordem.

a) É correcto afirmar que $A + B$ é invertível?

Solução: Não. Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) Será que a matriz A^3BC^{-1} é invertível?

Solução: Sim, a inversa é a matriz $CB^{-1}(A^{-1})^3$.

c) Mostre que $A^{-1}(A + B)B^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

d) Prove que se $AB = AC$, então $B = C$.

4. Sejam A uma matriz quadrada de ordem 3 invertível e b e c vetores de \mathbb{R}^3 .

a) Classifique os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$.

Solução: São possíveis e determinados com soluções $A^{-1}b$ e Ac respectivamente.

b) Prove que os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$ são equivalentes sse $b = A^2c$.

Solução: $A^{-1}b = Ac \Leftrightarrow b = A^2c$.

c) Sejam u, v e w as soluções dos sistemas

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Determine, em termos dos vetores u, v e w , a matriz inversa de A .

Solução: A matriz inversa é $A^{-1} = UB^{-1}$ onde U é uma matriz 3×3 cujas

colunas são os vetores u, v e w , e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

5. Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Mostre que as proposições seguintes são equivalentes.

a) A é invertível.

b) $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

c) O sistema $Ax = b$ é possível para todo o vector b de \mathbb{R}^n .

Solução: A é invertível \Leftrightarrow não existem linhas nulas na matriz em escada que se obtém aplicando o método de Gauss a $A \Leftrightarrow Ax = b$ é possível para qualquer $b \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{car}(A) = n \Leftrightarrow$ o sistema $Ax = 0$ é determinado.

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e o vector $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Verifique que o sistema $Ax = b$ é possível.

b) Qual é a característica de A ? **Solução:** 2.

c) Indique um conjunto linearmente independente maximal de colunas de A .

Solução: $\{(1, 2, 1, 0), (0, -1, -1, 1)\}$.

7. (Teste Módulo 2 - 2006/2007)

Calcule $A^2 + 3bb^\top$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solução: $\begin{bmatrix} 13 & -6 & 7 \\ -5 & 7 & 22 \\ 7 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

8. (Teste Módulo 2 - 2006/2007)

Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -\alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 + \beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de α e β .

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \alpha & -2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -\alpha & 3 + \beta \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 - \alpha & 4 + \beta \\ 0 & 0 & \alpha + 2 & -4 - \alpha - 2\beta \end{array} \right]$$

Se $\alpha = -2$ e $\beta = -1$ o sistema é indeterminado. Se $\alpha = -2$ e $\beta \neq -1$ o sistema é impossível. Se $\alpha \neq -2$ então o sistema é determinado.

b) Resolva o sistema $Ax = b$, considerando $\alpha = 0$ e $\beta = -3$.

Solução: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

c) Indique, justificando, um valor de α para o qual a matriz A é invertível.

Solução: Por exemplo $\alpha = 0$, porque a matriz em escada resultante de aplicar a fase descendente do método de Gauss à matriz A não tem linhas de zeros.

9. (Teste Módulo 2 - 2006/2007)

Seja $Ax = b$ um sistema que admite as soluções não nulas u e v . Em que condições o vector $u + v$ ainda é solução de $Ax = b$? Justifique.

Solução: Para $b = 0$. $A(u + v) = b \Leftrightarrow Au + Av = b \Leftrightarrow b + b = b \Leftrightarrow b = 0$.

Capítulo 2

Introdução à programação linear

EXERCÍCIO 12 Considere o seguinte problema de programação linear.

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- a) Represente geometricamente a região admissível.
- b) Indique uma solução óptima, o valor da função objectivo nesse ponto e identifique as restrições *saturadas* (satisfeitas com igualdades).

Solução: $x_1 = 3$, $x_2 = 7$ é a única solução óptima. O valor da função objectivo neste ponto é 17. As restrições saturadas são a primeira e a segunda.

- c) Indique o maior intervalo de variação do membro direito da terceira restrição que mantém óptima a solução que referiu na alínea b).

Solução: $[3, +\infty[$.

- d) Dê exemplo de uma outra função objectivo relativamente à qual se mantém óptima a solução que indicou na alínea b).

Solução: $z = x_1 + 3x_2$.

EXERCÍCIOS 13

1. Uma câmara municipal pretende rentabilizar um parque de 100 ha destinando-o a área florestal, parque de campismo e reserva de caça. Para a manutenção do parque dispõe anualmente de uma verba de 30000 Euros e de 20000 horas de trabalho. O quadro seguinte indica o capital e horas de trabalho necessários à manutenção anual de cada hectare, consoante o tipo de ocupação de solo.

	capital (Euros)	horas de trabalho
floresta	100	100
caça	300	150
campismo	400	500

Prevê-se um lucro anual de 40, 60 e 80 Euros por cada hectare de terreno destinado a área florestal, parque de campismo e reserva de caça, respectivamente. Pretende determinar-se o número de hectares a destinar a cada tipo de ocupação de solo de forma a maximizar o lucro.

- a) Formule linearmente o problema atribuindo significado às variáveis utilizadas.

Solução: $\max 40x + 80y + 60z$
s.a $x + y + z \leq 100$
 $x + 3y + 4z \leq 300$
 $x + 1.5y + 5z \leq 200$
 $x, y, z \geq 0$

em que x , y e z são, respectivamente, os hectares destinados a área florestal, reserva de caça e parque de campismo.

- b) Converta à forma *standard* a formulação anterior e indique uma solução básica admissível.

Solução: $\max 40x + 80y + 60z$
s.a $x + y + z + x' = 100$
 $x + 3y + 4z + y' = 300$
 $x + 1.5y + 5z + z' = 200$
 $x, y, z, x', y', z' \geq 0$;

$x = y = z = 0$ e $x' = 100, y' = 300, z' = 200$ é solução básica admissível.

- c) Determine uma solução que proporcione o maior lucro quando 40 ha do terreno são destinados a reserva de caça.

Solução: Utilizar 40 ha do terreno para floresta e ocupar 20 ha para parque de campismo, o que proporciona o lucro máximo de 6000 Euros.

2. Formule e resolva o seguinte problema.

Um distribuidor de cafés vai misturar numa certa proporção os grãos provenientes do Brasil, Quênia e Jamaica, que dispõe em armazém, para fazer dois lotes de café A e B. A composição e o preço de venda de cada um dos lotes, assim como a quantidade existente em armazém de cada um dos tipos de café estão indicados no

quadro seguinte.

	lote A	lote B	quant. disponível (kg)
Brasil	0.25	0.25	100
Quênia	0.75	0.25	150
Jamaica	0.0	0.5	175
preço de venda (Euros/Kg)	3.5	5.0	

Sabendo que todo o café será vendido, pretende determinar-se a quantidade de cada um dos lotes a que corresponde a maior receita bruta.

Solução: Sejam x_1 e x_2 as variáveis que indicam a quantidade, em Kgs, de café de lote A e de lote B, respectivamente. O problema pode ser formulado da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3.5x_1 + 5.0x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0.25x_1 + 0.25x_2 \leq 100 \\
 & 0.75x_1 + 0.25x_2 \leq 150 \\
 & 0.5x_2 \leq 175 \\
 & x_1, x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Devem ser produzidos 50 Kg de café do lote A e 350 Kg de café do lote B, que dão uma receita bruta máxima de 1925.0 Euros.

- Uma fábrica tem que reduzir a emissão dos seus 3 principais poluentes atmosféricos: as partículas, os óxidos sulfúricos e os hidrocarbonetos, em pelo menos 72, 50 e 24 milhares de quilos por ano, respectivamente. Para este efeito a fábrica vai modificar a chaminé, aumentando a altura e/ou a área dos filtros. Estas modificações permitem reduzir a emissão anual dos poluentes nos valores (em milhares de quilos) indicados na tabela seguinte.

	Aumentar 1 m altura da chaminé	Aumentar 1 m ² área dos filtros
Partículas	9	18
Óxidos sulfúricos	10	10
Hidrocarbonetos	12	4

Os custos de aumentar 1 m a altura e 1 m² a área dos filtros da chaminé são, respectivamente, 10 e 7 mil euros. A fábrica pretende determinar os valores dos aumentos da altura e da área dos filtros de modo a atingir o objectivo proposto com o menor custo possível.

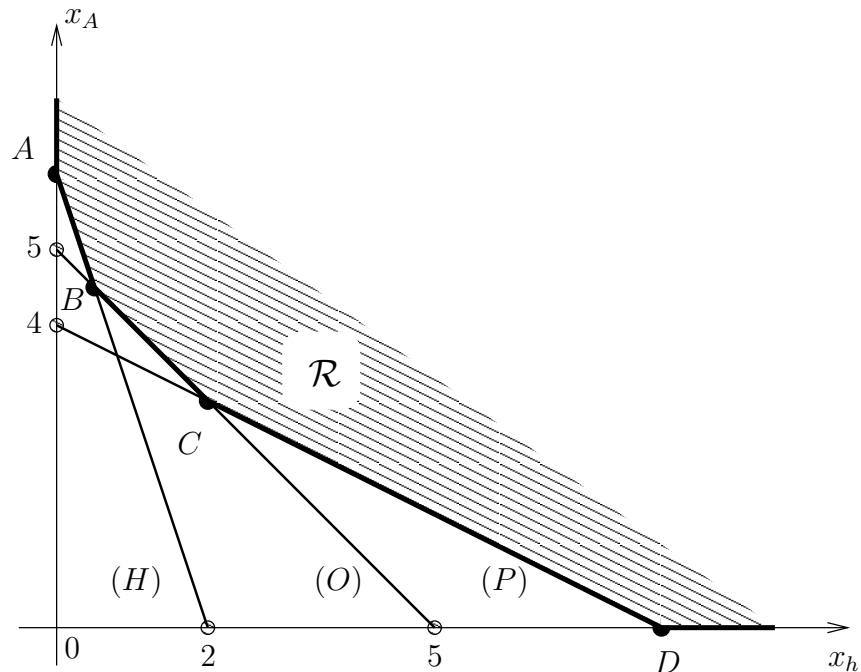
a) Formule linearmente o problema, atribuindo significado às variáveis.

$$\begin{aligned}
 \text{Solução: } \min \quad & 10x_h + 7x_A \\
 \text{s.a} \quad & 9x_h + 18x_A \geq 72 \quad (P) \\
 & 10x_h + 10x_A \geq 50 \quad (O) \\
 & 12x_h + 4x_A \geq 24 \quad (H) \\
 & x_h, x_A \geq 0
 \end{aligned}$$

em que x_h e x_A são, respectivamente, o número de m a aumentar a altura da chaminé e o número de m² a aumentar a área dos filtros.

b) Represente graficamente a região admissível.

Solução: Na figura seguinte \mathcal{R} representa a região admissível



cujos vértices são $A = (0, 6)$, $B = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, $C = (2, 3)$ e $D = (8, 0)$.

- c) Determine a solução óptima e a correspondente solução básica admissível. Qual é o custo que corresponde a esta solução?

Solução: A opção definida por $B = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, que consiste em aumentar $1/2$ m a altura da chaminé e $9/2$ m² a área dos filtros, é de custo mínimo. A solução básica admissível correspondente a B é $(x_h, x_A, d_P, d_O, d_H) = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}, 0, 0)$, em que d_P, d_O, d_H são as variáveis de folga associadas às restrições (P), (O) e (H), respectivamente.

4. Um avião de combate a incêndios florestais pode transportar dois tipos de produtos, P1 e P2. Uma tonelada de P1 ocupa 0.5 m³, permite combater uma área de incêndio de 1.5 ha e custa 2000 Euros. Uma tonelada de P2 ocupa 2 m³, permite combater uma área de 4 ha e custa 3000 Euros. O peso e espaço reservados para o transporte desses produtos não pode ultrapassar os 1.5 toneladas e 1.0 m³. Pretende

determinar-se a quantidade a transportar de cada produto de modo a combater incêndios numa área de pelo menos 2.5 ha e minimizando os custos.

- a) Formule linearmente o problema, indicando o significado das variáveis intervenientes.

Solução: Sejam x_1 e x_2 as variáveis que indicam a quantidade, em toneladas, dos produtos P1 e P2, respectivamente. O problema pode ser formulado da seguinte forma

$$\begin{aligned} \max \quad & 2000x_1 + 3000x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 1.5 \\ & 0.5x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & 1.5x_1 + 4x_2 \geq 2.5 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- b) Mostre que 1 tonelada de P1 e 0.25 toneladas de P2 é uma solução admissível e determine a área de incêndio que esta opção permite combater.

Solução: A área de incêndio coberta é 2.5 ha.

5. Um estabelecimento comercial pretende obter o máximo lucro disponibilizando 150 m^2 para armazenar, durante 3 meses, materiais dos tipos A, B, C e D. O processo de armazenagem terá que decorrer em não mais do que 10 horas e o compromisso de armazenar pelo menos 2 toneladas do material A terá que ser respeitado. Cada tonelada de A, B, C e D requer para ser armazenado 1, 4, 1 e 2 horas e ocupa 15, 16, 20 e 30 m^2 , respectivamente. São cobrados 200, 300, 400 e 700 Euros, respectivamente, por cada tonelada de A, B, C e D.

- a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado

às variáveis utilizadas.

$$\begin{aligned} \text{Solução: } \max \quad & 200a + 300b + 400c + 700d \\ \text{s.a} \quad & a + 4b + c + 2d \leq 10 \\ & 15a + 16b + 20c + 30d \leq 150 \\ & a \geq 2 \\ & a, b, c, d \geq 0 \end{aligned}$$

em que a , b , c e d são as quantidades, em toneladas, dos materiais dos tipos A, B, C e D, respectivamente, a armazenar.

- b) Converta à forma *standard* a formulação anterior e atribua significado às variáveis de folga.

$$\begin{aligned} \text{Solução: } \max \quad & 200a + 300b + 400c + 700d \\ \text{s.a} \quad & a + 4b + c + 2d + t = 10 \\ & 15a + 16b + 20c + 30d + e = 150 \\ & a - a' = 2 \\ & a, b, c, d, t, e, a' \geq 0 \end{aligned}$$

As variáveis de folga t , e e a' são os valores das diferenças entre o tempo de armazenagem, a área total ocupada e as toneladas de material do tipo A definidos por cada solução admissível e os membros direitos das restrições correspondentes.

- c) Mostre que é admissível a opção que consiste em armazenar 2 toneladas de A, 0 de B, 3 de C e 2 de D, mas não corresponde a um vértice da região admissível.

Solução: Para $a = 2, b = 0, c = 3, d = 2$ tem-se

$$\begin{aligned}
a + 4b + c + 2d = 9 &\leq 10 \\
15a + 16b + 20c + 30d = 150 &\leq 150 \\
a = 2 &\geq 2 \\
a, b, c, d &\geq 0
\end{aligned}$$

que mostra que $(2, 0, 3, 2)$ é solução admissível. Na forma *standard* a solução correspondente é $a = 2, b = 0, c = 3, d = 2, t = 1, e = 0, a' = 0$, com mais do que 3 variáveis não nulas, o que permite concluir que $(2, 0, 3, 2)$ não é vértice.

6. Uma empresa de distribuição foi encarregue de abastecer 3 clientes com uma mercadoria existente nos armazéns A e B. O armazém A pode disponibilizar até 60 toneladas (t) dessa mercadoria e o armazém B até 30 t. O cliente 1 requereu exatamente 20 t. Os clientes 2 e 3 estão dispostos a receber qualquer quantidade da mercadoria, mas a empresa comprometeu-se apenas com o cliente 2 a fornecer-lhe pelo menos 50 t.

A tabela seguinte indica o lucro (em dezenas de euros) resultante da distribuição de uma tonelada de mercadoria de cada armazém para cada um dos clientes.

Armazém	Cliente		
	1	2	3
A	8	5	7
B	6	4	10

A empresa pretende determinar a quantidade de mercadoria a transportar de cada armazém para cada cliente de modo a obter o maior lucro.

- a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis.

Solução:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 8x_{A1} + 5x_{A2} + 7x_{A3} + 6x_{B1} + 4x_{B2} + 10x_{B3} \\
 \text{s.a} \quad & x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} && \leq 60 \\
 & x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} && \leq 30 \\
 & x_{A1} + x_{B1} && = 20 \\
 & x_{A2} + x_{B2} && \geq 50 \\
 & x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3} && \geq 0
 \end{aligned}$$

em que x_{Ki} é a quantidade, em toneladas, de mercadoria a ser transportada do armazém K ($K = A, B$) para o cliente i ($i = 1, 2, 3$).

b) Verifique que é admissível a opção descrita na tabela seguinte

Armazém	Cliente		
	1	2	3
A	20	40	0
B	0	10	20

Qual é o lucro resultante desta opção?

Solução: A opção $x_{A1} = 20, x_{A2} = 40, x_{A3} = 0, x_{B1} = 0, x_{B2} = 10, x_{B3} = 20$ é solução admissível pois satisfaz todas as restrições da formulação da alínea a). O lucro resultante desta opção é 600 dezenas de euros.

c) Converta à forma *standard* a formulação anterior.

Solução:

$$\begin{array}{ll}
 \max & 8x_{A1} + 5x_{A2} + 7x_{A3} + 6x_{B1} + 4x_{B2} + 10x_{B3} \\
 \text{s.a} & x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + F_1 = 60 \\
 & x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + F_2 = 30 \\
 & x_{A1} + x_{B1} = 20 \\
 & x_{A2} + x_{B2} - F_3 = 50 \\
 & x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, F_1, F_2, F_3 \geq 0
 \end{array}$$

d) Mostre que a opção da alínea b) corresponde a um vértice da região admissível.

Solução: O sistema de equações que definem a região admissível do problema na forma *standard* é representado pela seguinte matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cccccc|ccc}
 x_{A1} & x_{A2} & x_{A3} & x_{B1} & x_{B2} & x_{B3} & F_1 & F_2 & F_3 & \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 60 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 30 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 50
 \end{array} \right].$$

À solução $x_{A1} = 20, x_{A2} = 40, x_{A3} = 0, x_{B1} = 0, x_{B2} = 10, x_{B3} = 20$ correspondem os valores das variáveis de folga $F_1 = F_2 = F_3 = 0$. A sub-

matriz das colunas associadas às 4 variáveis não nulas dessa solução é $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Uma vez que $\text{car}(M) = 4$ $\left(M \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$,

a solução admissível $(20, 40, 0, 0, 10, 20, 0, 0, 0)$ é básica e consequentemente $(20, 40, 0, 0, 10, 20)$ é um vértice do poliedro definido pelas restrições da alínea a).

7. Uma empresa decidiu iniciar a produção dos produtos P_1 e P_2 , dispondo para isso de mão-de-obra equivalente a 80 horas semanais. Semanalmente, cada tonelada de P_1 e P_2 dá um lucro de 12 e 8 euros e requer 5 e 2 horas de mão-de-obra, respectivamente. Sabe-se que a procura semanal do produto P_1 é não limitada, mas a de P_2 não ultrapassa as 30 toneladas. A empresa pretende determinar a quantidade a produzir semanalmente de cada produto, de forma a obter o lucro máximo.

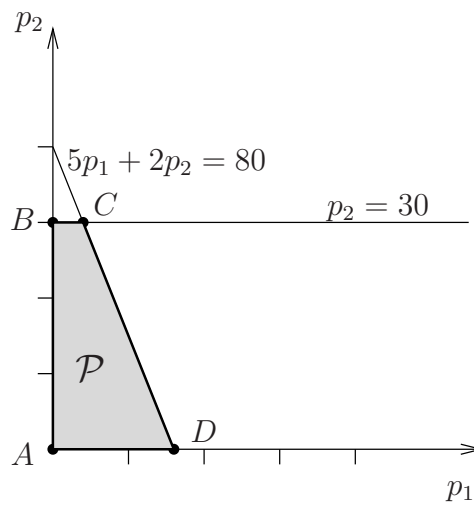
a) Descreva o problema de forma linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

$$\begin{aligned} \text{Solução: } \max \quad & 12p_1 + 8p_2 \\ \text{s.a} \quad & 5p_1 + 2p_2 \leq 80 \\ & p_2 \leq 30 \\ & p_1, p_2 \geq 0 \end{aligned}$$

em que p_1 e p_2 são, respectivamente, as toneladas de P_1 e P_2 a produzir semanalmente.

b) Represente graficamente a região admissível.

Solução: A figura representa a região admissível \mathcal{P} . Os vértices são $A = (0, 0)$, $B = (0, 30)$, $C = (4, 30)$, $D = (16, 0)$.



c) Identifique uma solução óptima e a correspondente solução básica admissível.

Solução: C , que representa a opção de produzir semanalmente 4 toneladas de P_1 e 30 de P_2 , é solução óptima. A solução básica admissível correspondente é $(4, 30, 0, 0)$.

d) Determine os valores que poderá assumir o lucro resultante da venda de cada tonelada de produto P_1 de forma a manter óptima a solução determinada na alínea anterior.

Solução: Entre 0 e 20 euros.

8. Considere o problema de programação linear seguinte.

$$\text{maximizar } 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4$$

$$\begin{aligned} \text{com } x \in \mathcal{P} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : & \quad x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 3 \\ & \quad x_1 - 2x_3 + x_4 \geq 2 \\ & \quad x_1 + x_3 \leq 3 \\ & \quad x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ & \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\}. \end{aligned}$$

- a) Estabeleça as restrições lineares que definem a região admissível $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^7$ do correspondente problema linear na forma *standard*.

Solução:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) : & \quad x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ & \quad x_1 - 2x_3 + x_4 - x_6 = 2 \\ & \quad x_1 + x_3 + x_7 = 3 \\ & \quad x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ & \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0\}. \end{aligned}$$

- b) Verifique que $v = (2, 3, 0, 0)$ é vértice de \mathcal{P} e indique o valor da função objectivo em v .

Solução: $v = (2, 3, 0, 0)$ é vértice de \mathcal{P} sse $\bar{v} = (2, 3, 0, 0, 0, 0, 1)$, o ponto de \mathcal{F} que lhe corresponde, é solução básica admissível. Como a matriz dos coeficientes do sistema de equações que definem \mathcal{F} tem característica igual a 4 e o conjunto das colunas correspondentes às variáveis não nulas (colunas 1, 2 e 7) é linearmente independente, tem-se \bar{v} solução básica. É admissível pois as componentes são não negativas. O valor da função objectivo em v é igual a 7.

9. Considere o problema

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 20x_1 + 30x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ & x_1 \leq 60 \\ & x_2 \leq 50 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- a) Represente graficamente a região admissível e as soluções admissíveis a que correspondem valores da função objectivo iguais a 600.
- b) Indique uma solução óptima e a correspondente solução básica admissível.

Solução: $x_1 = 60$, $x_2 = 30$ é a única solução óptima. A solução básica admissível correspondente é $(60, 30, 0, 0, 20)$.

- c) Se os coeficientes da função objectivo coincidissem e fossem positivos, quais seriam as soluções óptimas?

Solução: $x_1 = 60$, $x_2 = 30$ continuaria a ser a única solução óptima.

Capítulo 3

Norma, produto interno e ângulo de vectors

EXERCÍCIOS 14

1. Calcule as normas dos seguintes vectores.

a) $(1, -1, 2)$ **Solução:** $\sqrt{6}$

b) $(-1, 0, \pi, 0)$ **Solução:** $\sqrt{1 + \pi^2}$

c) $(5, 0, 1, 0, 1, 3)$. **Solução:** 6

2. Calcule as distância entre os seguintes pares de vectores.

a) $(1, -1, 2)$ e $(0, -1, 0)$ **Solução:** $\sqrt{5}$

b) $(-1, 0, 2, 0)$ e $(1, 0, 0, 1)$ **Solução:** 3

c) $(5, 0, 1, 0, 1, 3)$ e $(-1, 2, 0, 1, 1, 0)$. **Solução:** $\sqrt{51}$

3. Determine todos os vectores unitários que fazem ângulos de $\frac{\pi}{3}$ com cada um dos seguintes pares de vectores.

a) $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ **Solução:** $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

b) $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 0)$. **Solução:** $(\frac{\sqrt{2}+2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}-2}{4})$ e $(\frac{\sqrt{2}-2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}+2}{4})$

4. Identifique um vector não nulo que seja ortogonal a ambos os vectores de cada um dos seguintes pares.

a) $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, -1)$ **Solução:** $(-1, 2, 1)$

b) $(1, -1, 2)$ e $(2, 1, -1)$. **Solução:** $(-1, 5, 3)$

5. Sejam x e y vectores de \mathbb{R}^m . Prove os seguintes resultados.

a) $\|x + y\| = \|x - y\|$ sse x e y são ortogonais.

b) Os vectores $x - y$ e $x + y$ são ortogonais sse $\|x\| = \|y\|$.

c) Se x e y são ortogonais, então $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

d) Se x e y são unitários e ortogonais, então $\|x - y\| = \sqrt{2}$.

6. Uma matriz quadrada A de ordem n diz-se *ortogonal* se as colunas são unitárias e quaisquer duas colunas distintas são ortogonais. Prove os seguintes resultados.

a) A matriz A é ortogonal sse $A^{-1} = A^T$.

b) Se a matriz A é ortogonal, então é simétrica sse $A^2 = I$.

Capítulo 4

Valores e vectores próprios

4.1 Determinantes

EXERCÍCIOS 15 Prove os seguintes resultados.

1. O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.
2. Uma matriz com uma linha ou uma coluna de zeros tem determinante igual a zero.
3. É nulo o determinante de uma matriz com linhas proporcionais.

EXERCÍCIOS 16

1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes indicando se é invertível.

a) $\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$ **Solução:** 1. Matriz invertível.

b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ **Solução:** 18. Matriz invertível.

c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **Solução:** -9 . Matriz invertível.

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **Solução:** 11 . Matriz invertível.

e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ **Solução:** 65 . Matriz invertível.

f) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **Solução:** 42 . Matriz invertível.

2. Utilizando a noção de produto externo, indique

a) um vector ortogonal aos vectores $u = (1, 1, 2)$ e $v = (1, 0, 1)$,

Solução: $(1, 1, -1)$

b) uma equação cartesiana do plano definido por

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 1, 2) + \mu(1, 0, 1), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solução: $x + y - z = 0$

3. Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de \mathbb{R}^3 e $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ vectores

linearmente independentes de \mathbb{R}^3 . Mostre que a equação

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

define o plano que passa no ponto P_0 e que contém as direcções dos vectores u e v .

4.2 Vectores e valores próprios

EXERCÍCIOS 17

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Verifique que $(1, 5, 10)$ é vector próprio. **Solução:** $A \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$.

b) Verifique que 1 é valor próprio. **Solução:** $\det(A - 1I) = 0$.

2. Determine os valores próprios e correspondentes vectores próprios de cada uma das seguintes matrizes.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, **Solução:** Valores próprios: 1 e 2; vectores próprios: $E(1) = \{(x, y) : x = -y, y = \forall\}$ e $E(2) = \{(x, y) : x = \forall, y = 0\}$

$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, **Solução:** Valores próprios: $\pm i$; vectores próprios: $E(+i) = \{(x, y) : x = yi, y = \forall\}$ e $E(-i) = \{(x, y) : x = -yi, y = \forall\}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Solução: Valor próprio: } 1; \text{ vectores próprios: } E(1) = \{(x, y, z) : x = 0, y = 0, z = \forall\}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{Solução: Valores próprios: } 1 \text{ e } 6; \text{ vectores próprios: } E(1) = \{(x, y, z) : x = \forall, y = 0, z = 0\} \text{ e } E(6) = \{(x, y, z) : x = \frac{1}{10}z, y = \frac{1}{2}z, z = \forall\}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Solução: Valores próprios: } 1 - 2\sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2} \text{ e } 1; \text{ vectores próprios: } E(1 - 2\sqrt{2}) = \{(x, y, z) : x = \sqrt{2}z, y = -z, z = \forall\}, E(1 + 2\sqrt{2}) = \{(x, y, z) : x = -\sqrt{2}z, y = -z, z = \forall\}, E(1) = \{(x, y, z) : x = 0, y = z, z = \forall\}$$

$$F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{Solução: Valores próprios: } 2 \text{ e } 4; \text{ vectores próprios: } E(2) = \{(x, y, z) : x = -y, y = \forall, z = \forall\} \text{ e } E(4) = \{(x, y, z) : x = y, y = \forall, z = 0\}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad \text{Solução: Valores próprios: } -2, 1 \text{ e } 2; \text{ vectores próprios: } E(-2) = \{(x, y, z, w) : x = y = w = 0, z = \forall\}, E(1) = \{(x, y, z, w) : x = \forall, y = z = w = 0\} \text{ e } E(2) = \{(x, y, z, w) : x = y = z = 0, w = \forall\}.$$

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & a \end{bmatrix}$, com $a \in \mathbb{R}$.

- a) Determine os valores do parâmetro a para os quais a matriz A admite o valor próprio zero. **Solução:** $a = 1$.

- b) Para cada um dos valores de a obtidos na alínea anterior calcule os valores próprios de A e identifique os correspondentes vectores próprios.

Solução: Valores próprios: 0 e 2; vectores próprios: $E(0) = \{(x, y, z) : x = -y, y = \forall, z = 0\}$ e $E(2) = \{(x, y, z) : x = 0, y = z, z = \forall\}$.

- c) Discuta, em função do parâmetro a , a invertibilidade da matriz A .

Solução: Para $a \neq 1$, A é invertível; para $a = 1$, A é singular.

4. Seja v um vector próprio associado ao valor próprio λ de uma matriz A .

- a) Mostre que, para todo o real α , v é um vector próprio da matriz $A - \alpha I$ e indique o valor próprio associado. **Solução:** O valor próprio associado é $\lambda - \alpha$.

- b) Mostre que, para todo o inteiro n , v é vector próprio da matriz A^n e indique o valor próprio associado. **Solução:** O valor próprio associado é λ^n .

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

- a) Calcule o ângulo formado pelas 1^a e 2^a colunas de A . **Solução:** $\frac{2}{3}\pi$.
- b) Diga, justificando, se as colunas de A formam um conjunto linearmente independente. **Solução:** Não, dado que $\text{car}(A) = 2$.
- c) Identifique um vector não nulo de \mathbb{R}^3 que seja ortogonal simultaneamente às 1^a e 2^a colunas de A . **Solução:** $(-1, 1, -1)$.
- d) Indique um vector b de \mathbb{R}^3 tal que o sistema $Ax = b$ seja impossível.

Solução: $(-1, 1, -1)$.

e) Verifique que -1 é valor próprio de A e determine os vectores próprios associados a -1 .

Solução: Verifica-se que $\det(A+1I) = 0$; vectores próprios: $E(-1) \setminus \{(0, 0, 0)\}$ em que $E(-1) = \{(x, y, z) : x = 0, y = z, z = \forall\}$.